

**EXERCICIS I PROBLEMES DELS
FONAMENTS FÍSICS
D'ARQUITECTURA. II. ESTÀTICA
APLICADA A LES ESTRUCTURES.**

**José Joaquín Rodes Roca
Antonio Durá Doménech**

Materials docents en valencià

XXX

FÍSICA, ENGINYERIA DE SISTEMES I TEORIA DEL
SENYAL

UNIVERSITAT D'ALACANT

© José Joaquín Rodes Roca
Antonio Durá Doménech

Els autors han comptat amb una beca del Secretariat de Promoció del Valencià per a l'elaboració d'aquest material docent.

L'edició d'aquest material s'ha fet dins el marc del conveni per a la promoció de l'ús social del valencià signat per la Universitat d'Alacant amb la Conselleria d'Educació de la Generalitat Valenciana.

Alacant, novembre de 2013

Edició: Universitat d'Alacant. Secretariat de Promoció del Valencià
Campus de Sant Vicent del Raspeig. Apartat de correus 99 - 03080 Alacant
Tel. 96 590 3485, A/e: s.proval@ua.es

Maquetació: Aquest quadern ha estat maquetat utilitzant la classe `ColJFSPV.cls` de documents per a \LaTeX escrita per Joan Josep Climent

Impressió: Limencop. Edifici de Ciències Socials, planta baixa
Campus de Sant Vicent del Raspeig, Tel. 96 590 3400 ext. 2784
<http://impresiondigital.limencop.ua.es>

Índex

Presentació	v
Introducció	vii
1 Estàtica analítica i gràfica	1
1.1 Introducció teòrica i objectius	1
1.2 Referències bibliogràfiques	2
1.3 Exercicis tipus qüestió	2
1.4 Exercicis tipus examen	15
1.5 Exercicis tipus problema investigació	27
1.6 Resolució dels exercicis tipus qüestió	29
1.7 Resolució dels exercicis tipus examen	51
2 Esforços en elements estructurals: Estructures articulades planes	77
2.1 Introducció teòrica i objectius	77
2.2 Referències bibliogràfiques	78
2.3 Exercicis tipus qüestió	78
2.4 Exercicis tipus examen	81
2.5 Exercicis tipus problema investigació	95
2.6 Resolució dels exercicis tipus qüestió	96
2.7 Resolució dels exercicis tipus examen	101
3 Esforços en elements estructurals: Bigues isostàtiques	145
3.1 Introducció teòrica i objectius	145
3.2 Referències bibliogràfiques	146
3.3 Exercicis tipus qüestió	146
3.4 Exercicis tipus examen	150
3.5 Exercicis tipus problema investigació	154
3.6 Resolució dels exercicis tipus qüestió	155
3.7 Resolució dels exercicis tipus examen	164
A Seqüències en la resolució de problemes	183

B La metodologia ABP/PBL	185
C Magnituds, unitats i dimensions	187
D Resum dels fonaments matemàtics per a la física	191
D.1 Vectors lliscants	191
D.2 Geometria de masses	193
D.3 Estàtica i elasticitat	194
D.4 Derivades	194
D.5 Integrals	195
Bibliografia	199

Presentació

Des de l'equip de govern de la Universitat d'Alacant valorem la docència en valencià com un component molt positiu en la formació universitària dels futurs professionals llicenciats o diplomats en aquesta Universitat. És una obligació de la universitat formar bons professionals que el dia de demà coneguen bé la realitat que els envolta i hi presten amb normalitat els seus serveis. Per això, el domini del valencià propi de la seua especialitat tècnica o científica és fonamental per a entendre i per a gestionar el procés de desenvolupament de la societat valenciana i també per a integrar-s'hi amb total normalitat.

Aquest material docent que ara presentem és un resultat més d'aquesta filosofia que impregna l'actual equip de govern de preparar bons professionals que puguen fer un servei en la societat que ha creat i que manté la Universitat d'Alacant. Per a fer possible que els alumnes actuals i futurs de la Universitat puguen exercir competentment la seua professió en valencià, hem d'estimular un procés previ d'una certa complexitat que, per les seues característiques, ha de ser lent per necessitat: preparar bons professors que puguen impartir la docència en valencià i disposar de materials de suport adequats.

Per ajudar a aconseguir això, en els darrers anys hem fet convocatòries d'ajudes per a elaborar materials docents en valencià. L'objectiu que hi ha darrere d'aquestes convocatòries és començar a publicar, a poc a poc, els materials que tinguen la qualitat suficient. Aquestes iniciatives de suport a l'ús del valencià com a llengua de creació i de comunicació científica són possibles gràcies a l'ajuda de la Generalitat Valenciana (Conselleria de Cultura i Educació. Direcció General d'Ordenació i Innovació Educativa i Política Lingüística), a través del conveni per a la promoció de l'ús del valencià.

Manel Palomar Sanz
Rector

Introducció

La capacitació per a resoldre problemes de física és molt important en la formació del nostre alumnat. Encara que no tots els coneixements tenen una aplicació directa a situacions reals, la resolució de problemes facilita la comprensió d'un concepte o d'una llei. No podem oblidar que s'han de plantejar problemes de forma que l'alumnat desenvolupi una capacitat d'anàlisi vàlida en qualsevol situació que se li pugui presentar amb posterioritat([5], [9]).

A més a més, aquesta activitat és una eina d'avaluació fonamental i d'una objectivitat reconeguda pel professorat. El diferent grau de complexitat permet entrenar diferents situacions i comprovar com es modifica la solució quan canvia alguna variable del problema inicial. Les tècniques de resolució dels problemes afavoreixen el desenvolupament i l'aprenentatge de procediments, destreses i actituds científiques que es poden aplicar tant a situacions professionals com a situacions personals, i augmentar la capacitat de raonament de l'alumnat.

D'altra banda, cal fer entendre a l'alumnat que la resolució de qualsevol problema requereix una successió d'accions ben definides ([11]). No solament es tracta de donar la resposta correcta sinó d'entendre què s'ha fet i saber per què les accions realitzades eren apropiades.

El contingut d'aquest quadern correspon a una selecció dels problemes d'exàmens que els autors i el professorat implicat, Juan Carlos Moreno Marín, Jenaro Vera Guarinos, Cristian Neipp López, Tarsicio Beléndez Vázquez, i David Israel Méndez Alcaraz, han proposat al llarg dels últims vint anys a l'alumnat d'Arquitectura Tècnica i Arquitectura Superior en l'assignatura de Fonaments Físics. Hem centrat aquesta selecció en els blocs temàtics d'Estàtica i Estàtica aplicada a les estructures. Volem agrair explícitament l'ajuda i col·laboració en la selecció dels exercicis a tot el professorat que ha impartit o imparteix aquestes assignatures.

El principal objectiu d'aquest treball és mostrar a l'alumnat la varietat de problemes que es poden proposar i l'aprenentatge de les estratègies de resolució de problemes. Amb aquesta finalitat, el quadern s'ha estructurat en qüestions, exercicis i problemes, amb un nivell creixent de dificultats. Segons la preparació de cada estudiant, aquesta classificació pot tenir una interpretació diferent.

La presentació dels exercicis i problemes es farà de forma que l'alumnat pugui realitzar-los de manera autònoma, indicant les solucions parcials, afegint algunes ajudes i deixant la resolució completa en la part final del capítol. L'objectiu és que l'alumnat aprengui a resoldre problemes de manera activa i no estudei els problemes com si fóra una part més de la teoria. Estem convençuts que aquest quadern farà augmentar la qualitat de l'aprenentatge i millorarà el rendiment en la resolució de problemes del nostre alumnat.

Finalment, ens trobem en un moment de canvi en la docència universitària i hem volgut aprofitar aquesta circumstància per aplicar algunes característiques del nou model educatiu ([4]). Aquesta raó ens ha portat a desenvolupar un apartat específic per a introduir el concepte de problema tipus investigació i incloure-hi aplicacions d'interès professional.

Els autors

Departament de Física, Enginyeria de Sistemes i Teoria del Senyal

Universitat d'Alacant, juliol de 2013

Estàtica analítica i gràfica

1.1 Introducció teòrica i objectius

L'arquitectura i la tècnica en general estudien sistemes físics sotmesos a l'acció de forces. Aquestes forces poden tenir els orígens següents:

- el pes dels elements que formen el sistema;
- la cohesió interna entre les diferents parts del sistema;
- l'acció de càrregues exteriors al sistema, transitòries o permanents, puntuals o distribuïdes, etc.; i
- les limitacions que altres sistemes imposen al moviment del que es considera.

En aquest bloc temàtic es pretén que l'alumnat comprengui els principis fonamentals de l'estàtica i la seua utilització per a la resolució de casos pràctics. També s'ha de comprendre els principis fonamentals de la teoria de l'elasticitat per a la descripció formal del comportament elàstic dels materials de construcció.

Els objectius fonamentals que s'hauran d'adquirir són:

- Saber les lleis de Newton.
- Saber el concepte d'equilibri.
- Saber els tipus d'enllaços o lligams.
- Saber el concepte de fregament.
- Saber construir el diagrama de sòlid lliure.
- Saber els mètodes de resolució analítica de sistemes de forces coplanàries, incloent-hi forces distribuïdes.
- Saber els conceptes d'estabilitat i gir.
- Saber els mètodes de resolució gràfica de sistemes de forces coplanàries, incloent-hi forces distribuïdes.

Aquests aspectes són de gran interès per al desenvolupament de qualsevol projecte d'enginyeria o arquitectura relacionat amb l'edificació i la construcció en general. Concretament s'aplicarà en:

- Anàlisi de les situacions d'equilibri en general.
- Equilibri d'estructures arquitectòniques.
- Elasticitat d'elements resistents.
- Problemes d'hidrostàtica.

1.2 Referències bibliogràfiques

L'estudi teòric estarà relacionat amb els coneixements previs de l'alumnat. Aquest capítol es pot preparar llegint els capítols 7, 8 i 9 de [6] i de [13], del capítol 4 al 8 de [17], els capítols 8 i 9 de [8] o els capítols 5 i 6 de [1] i de [15] i els capítols 6 i 7 de [12]. També es pot consultar el capítol 12 de [16], el capítol 9 de [7] o els llibres [8] i [17]. Aprofitant el desenvolupament d'eines tecnològiques, qualsevol persona amb accés a Internet té la possibilitat de seguir el curs de fonaments físics de les estructures pel bloc <http://blogs.ua.es/jjrr2011> així com per l'OpenCourseWare de la Universitat d'Alacant.

1.3 Exercicis tipus qüestió

Depenent de la dificultat que trobe l'alumnat a l'hora de resoldre'ls, poden interpretar-se com problemes curts. El temps dedicat a resoldre cada qüestió no hauria de superar els trenta minuts en cap cas. Normalment, es tracta d'aplicar alguna llei concreta, un concepte teòric que permet arribar a la solució ràpidament o l'aplicació de fonaments matemàtics que s'haurien de saber.

Exercici 1.1: Una grua fixa té una massa de 2000 kg i es fa servir per aixecar una càrrega P de 2400 kp (figura 1.1). El centre de gravetat de la grua és G . Determineu les reaccions en els punts de suport (Aquest exercici està resolt gràficament en l'apartat 9.3R dels problemes resolts del capítol 9 de les referències [6] i [13]).

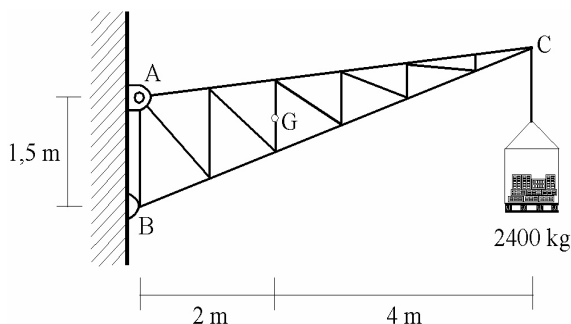


Figura 1.1: Figura de la grua amb els enllaços i càrregues aplicades de l'exercici 1.1

Observació 1.1: Dibuixeu el diagrama de sòlid lliure que correspon a aquesta situació.

Observació 1.2: Apliqueu les condicions de l'equilibri i resoleu el sistema d'equacions.

SOLUCIÓ: $R_{Ax} = 12\,267\text{ kp}$; $R_{Ay} = 4\,400\text{ kp}$ i $R_{Bx} = 12\,267\text{ kp}$ \square

Exercici 1.2: La ploma de la grua de la figura 1.2 té una longitud de 12 m i un pes de 10 kN. La distància entre el punt de suport A i el centre de gravetat de la ploma és de 6 m. Es demana determinar, per a la situació que es mostra en la figura, la tensió T en el cable i la reacció en A.

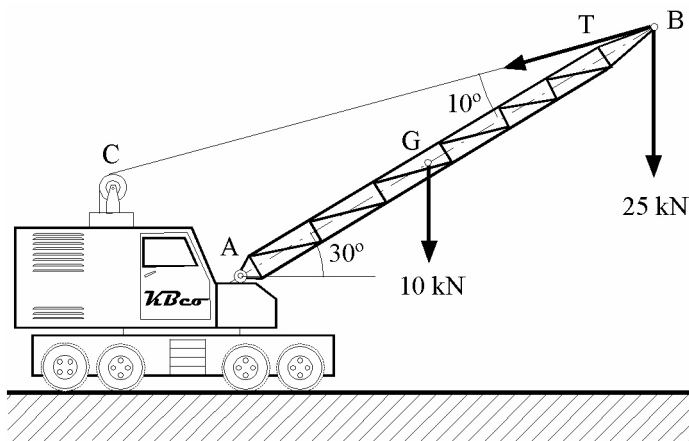


Figura 1.2: Figura de la grua amb els enllaços i càrregues aplicades de l'exercici 1.2

Observació 1.3: Les observacions de l'exercici 1.1 són aplicables en aquest exercici també.

SOLUCIÓ: $R_{Ax} = 140,6\text{ kN}$; $R_{Ay} = 86,2\text{ kN}$ i $T = 149,6\text{ kp}$ \square

Exercici 1.3: Calculeu gràficament el pes del cilindre de la figura 1.3, si se sap que la força necessària per a sobrepassar l'esglaó és major o igual que 525 kp. El radi del cilindre és de 60 cm.

Observació 1.4: Fixeu-vos que en el moment just que comença a sobrepassar l'esglaó no hi ha contacte entre el cilindre i la superfície horitzontal.

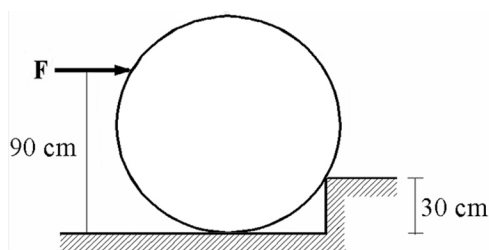


Figura 1.3: Figura del cilindre de l'exercici 1.3

SOLUCIÓ: $P_{cilindre} \approx 605 \text{ kp}$

□

Exercici 1.4: Calculeu la tensió T i la reacció en O per a la plantilla corba $AOBC$ de la figura 1.4, si $\alpha = 10^\circ$, $r = 6 \text{ cm}$ i $P = 100 \text{ kp}$. El pes de la plantilla se suposa negligible. Resoleu el problema analíticament i gràficament.

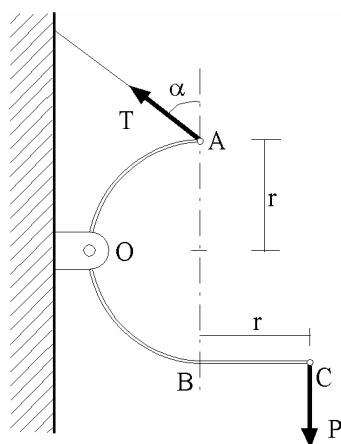


Figura 1.4: Figura de la plantilla corba amb els enllaços i càrregues aplicades de l'exercici 1.4

Observació 1.5: Les observacions de l'exercici 1.1 són aplicables en aquest exercici també.

Observació 1.6: Per a la resolució gràfica de l'exercici, cal recordar que quan les forces actuant són tres, i totes tres coplanàries, l'equilibri del sistema implica que aquestes han de ser concurrents.

SOLUCIÓ: $R_{O_x} = 30,0 \text{ kp}$; $R_{O_y} = 70,0 \text{ kp}$ i $T = 172,7 \text{ kp}$

□

Exercici 1.5: Determineu gràficament la magnitud, la direcció, el sentit i la posició de la resultant del sistema de forces coplanàries de la figura 1.5.

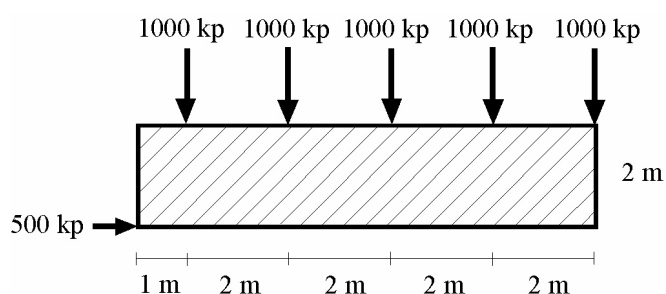


Figura 1.5: Figura del sistema de forces coplanàries de l'exercici 1.5

Observació 1.7: Aquest exercici es pot resoldre analíticament tenint en compte que és un sistema de vectors lliscants coplanaris (es pot reduir a una única força resultant aplicada en un punt de l'eix central [13]). Si cal, podeu consultar els exercicis resolts en [14].

Observació 1.8: S'ha d'aplicar el concepte de polígon de forces i polígon funicular.

SOLUCIÓ: 5 025 kp; -79° respecte l'eix $+OX$; aplicada a 4,6 m de l'extrem esquerre de la peça \square

Exercici 1.6: Determineu gràficament el centre de gravetat de la secció plana que es mostra en la figura 1.6.

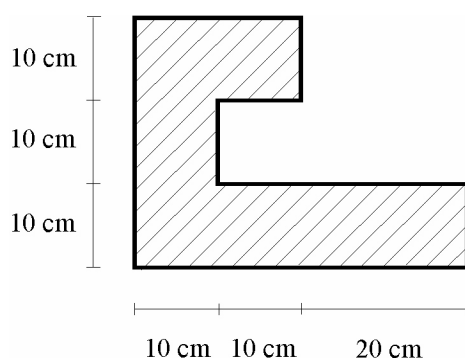


Figura 1.6: Figura de la secció plana de l'exercici 1.6

Observació 1.9: Aquest exercici es pot resoldre analíticament aplicant la definició estudiada en el bloc de geometria de masses de [13], per exemple. Si cal, podeu consultar els exercicis resolts en [14].

Observació 1.10: S'ha d'aplicar el concepte de polígon de forces i polígon funicular.

SOLUCIÓ: $G(15, 0; 12, 5)$ cm, amb l'origen situat en l'extrem inferior esquerre de la figura 1.6 □

Exercici 1.7: El semicilindre de la figura 1.7 pesa 1 kN. Sabent que no hi ha fregament entre el pla inclinat i el semicilindre, determina la força horitzontal necessària per a l'equilibri.

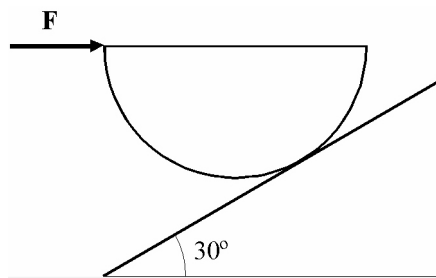


Figura 1.7: Figura del semicilindre i el pla inclinat de l'exercici 1.7

Observació 1.11: La resolució analítica es fa amb l'estratègia indicada en exercicis anteriors.

SOLUCIÓ: $F \approx 3,5$ kN □

Exercici 1.8: Una esfera uniforme de pes P i radi R està subjectada per un cable unit a una paret sense fregament a una distància L per damunt del centre de gravetat de l'esfera, com s'indica en la figura 1.8. Determineu:

1. La tensió T del cable.
2. La reacció R_B exercida per la paret sobre l'esfera.

Observació 1.12: La resolució analítica es fa amb l'estratègia indicada en exercicis anteriors.

SOLUCIÓ: $T = P \cdot \sqrt{L^2 + R^2}/L$; $R_B = P \cdot R/L$ □

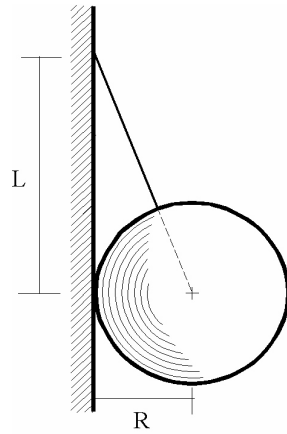


Figura 1.8: Figura de l'esfera de l'exercici 1.8

Exercici 1.9: Una presa de gravetat suporta la força de l'aigua gràcies al seu propi pes. La secció de la presa es mostra en la figura 1.9. Es pregunta quina hauria de ser l'altura màxima de la presa si es vol tenir un coeficient de seguretat de 3. La força de pressió de l'aigua és equivalent a una força distribuïda de perfil triangular, que actua horitzontalment sobre la paret vertical de la presa. La resultant d'aquestes forces horitzontals val $5H^2$, on H és l'altura de la presa en metres, i la força es dóna en tones. El pes de la presa val $125H$, expressat també en tones.

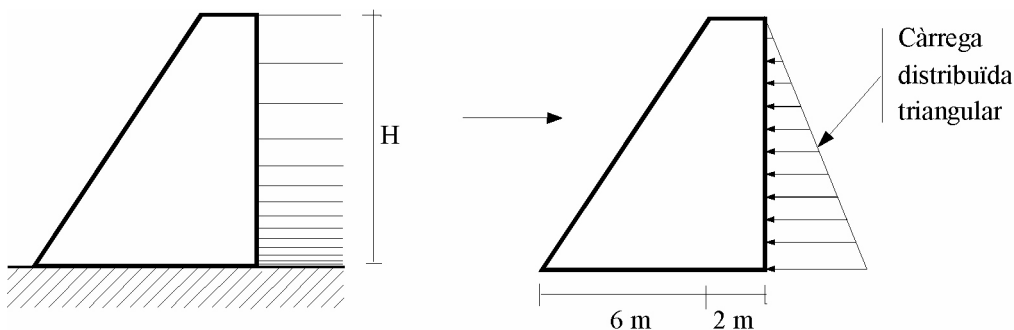


Figura 1.9: Figura de la presa de gravetat amb la distribució de càrrega aplicada de l'exercici 1.9

Observació 1.13: Com que la força pes s'aplica en el centre de gravetat del sòlid, cal recordar el procés de càlcul d'aquest.

Observació 1.14: També cal recordar el concepte de sistema equivalent per a reduir a una única força una distribució de càrrega triangular.

Observació 1.15: El coeficient de seguretat és el quocient entre el moment d'antigrir i el moment de gir.

SOLUCIÓ: $H = 11,4 \text{ m}$

□

Exercici 1.10: El pes de la grua és $P_G = 50 \text{ kN}$, i està aplicat en el seu cdg G (figura 1.10). Les distàncies b i L tenen els valors: $b = 0,75 \text{ m}$; $L = 4 \text{ m}$. La base de suport és quadrada i el seu costat val $a = 2 \text{ m}$. Si el pes específic del material de la base val 20 kN/m^3 , calculeu l'altura mínima de la base perquè el conjunt no bolque, si la càrrega màxima P que suportarà la grua és de 25 kN i volem tenir un coeficient de seguretat igual a 2.

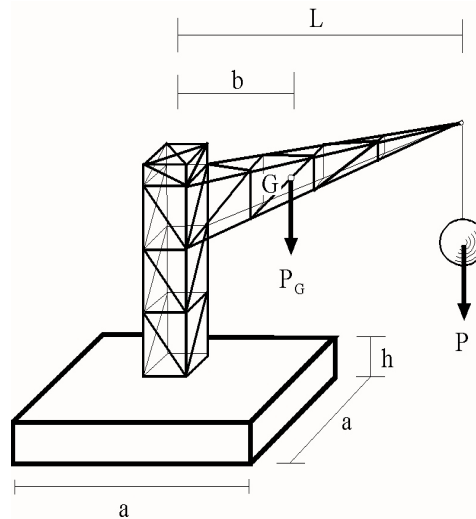


Figura 1.10: Figura de la grua amb els enllaços i càrregues aplicades de l'exercici 1.10

Observació 1.16: Assumint un pla de simetria per a la grua i les càrregues aplicades, obteniu el DSL corresponent.

Observació 1.17: Penseu en el sistema físic i deduiu el punt sobre el qual s'ha de calcular els moments tant de gir com d'antigrir.

Observació 1.18: Recordeu que el coeficient de seguretat és el quocient entre el moment d'antigrir i el moment de gir.

SOLUCIÓ: $h = 1,72 \text{ m}$

□

Exercici 1.11: Una barra de 3 m de longitud i 40 kp de pes està unida a la paret a través d'una articulació en A i un cable T. Sobre l'extrem penja un pes de 30 kp. Es demana determinar, analíticament i gràficament, la reacció en A i la tensió en el cable.

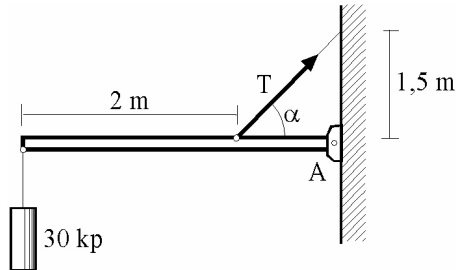


Figura 1.11: Figura de la barra amb els enllaços i càrregues aplicades de l'exercici 1.11

Observació 1.19: La resolució analítica es fa amb l'estratègia indicada en exercicis anteriors.

Observació 1.20: En la resolució gràfica cal adonar-se'n que és un sistema de 4 forces que es pot reduir a un sistema de tres forces, fent la resolució parcial dels pesos 30 i 40 kp.

SOLUCIÓ: $\mathbf{R}_A = (100, -80)$ kp; $T = 180,3$ kp

□

Exercici 1.12: El pes P , penjat d'una ploma de longitud L i pes negligible, l'aixeca una força F que exerceix un cable que passa per una corriola. La ploma recolza sobre una ròtula A. Es demana:

1. Demostreu que la reacció en A té sempre la direcció de la ploma, siga quin siga el valor de l'angle α .
2. El valor límit d'aquesta reacció si l'angle α és de 90° .

Observació 1.21: Identifiquen correctament els angles en el diagrama de sòlid lliure.

Observació 1.22: S'han d'aplicar relacions trigonomètriques bàsiques.

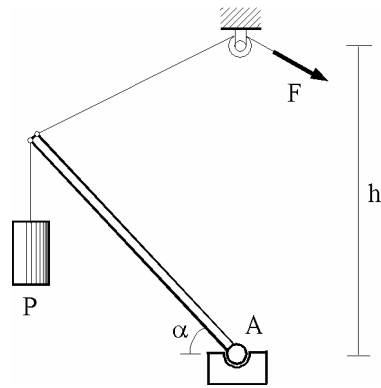


Figura 1.12: Figura de la ploma amb l'enllaç i càrregues aplicades de l'exercici 1.12

SOLUCIÓ: 1. S'ha de demostrar que la direcció de la reacció en A és, precisament, l'angle α .

2. $R_A = P$

□

Exercici 1.13: Un disc circular de radi R està dividit en dues peces idèntiques de pes 10 kp cadascuna, tal com indica la figura 1.13. Les dues peces es mantenen unides diametralment mitjançant una cinta sense pes, en els extrems de la qual pengen pesos P . A és el punt de recolzament sobre la superfície horitzontal. Es demana quin és el valor mínim de P perquè el sistema es mantinga en equilibri.

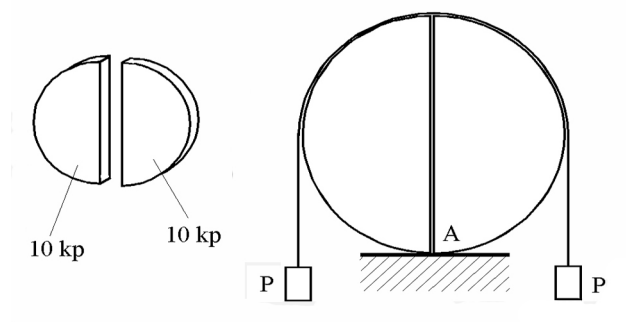


Figura 1.13: Figura del disc de l'exercici 1.13

Observació 1.23: Atesa la simetria del disc, penseu en el diagrama de sòlid lliure d'una de les peces.

Observació 1.24: En aplicar l'equilibri estàtic, adoneu-vos que es pot utilitzar una única relació per a resoldre'l.

SOLUCIÓ: $P = 4,24 \text{ kp}$

□

Exercici 1.14: Una antena parabòlica, de 3 000 kp de pes, es troba situada en l'extrem d'una biga de 3 000 kp de pes, articulada en l'altre extrem i subjectada per un cable que forma una angle de 30° amb l'horitzontal. El centre de gravetat de l'antena es troba a 1,5 m de l'extrem lliure de la biga, tal com mostra la figura 1.14. Calculeu el valor de la tensió en el cable i el de la reacció en l'articulació.

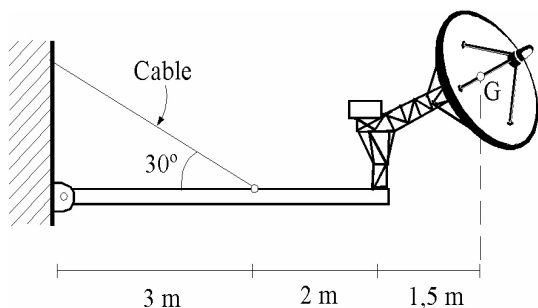


Figura 1.14: Figura de la biga amb l'antena parabòlica de l'exercici 1.14

Observació 1.25: En aplicar l'equilibri estàtic, adoneu-vos que es pot utilitzar el sistema equivalent sobre l'extrem lliure de la biga del pes de l'antena.

SOLUCIÓ: $T = 18\,000$ kp; $R_{Ax} \approx 15\,588$ kp i $R_{Ay} = -3\,000$ kp

□

Exercici 1.15: Una barra d'1 m de longitud i 450 N de pes, recolzada sobre una superfície rugosa, se sosté mitjançant un cable BC tal com mostra la figura 1.15. Quin serà el valor de l'angle límit α perquè no es produïska lliscament si el coeficient de fricció estàtic entre la barra i la superfície val 0,4? Quant val la tensió en el cable?

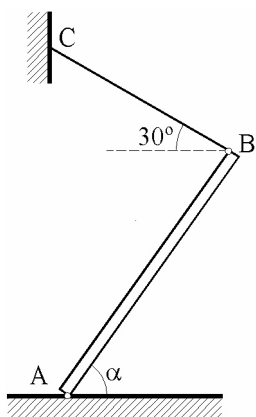


Figura 1.15: Figura de la barra de l'exercici 1.15

Observació 1.26: Recordeu que quan hi ha fricció entre dues superfícies la reacció ja no és perpendicular a la superfície de contacte.

SOLUCIÓ: $\alpha = 43,9^\circ$ i $T = 168,9 \text{ N}$

□

Exercici 1.16: Una barra no uniforme de pes P està suspesa en posició horitzontal per mitjà de dues cordes de pes negligible, tal com mostra la figura 1.16. L'angle que forma una de les cordes amb la vertical és $\alpha = 36,9^\circ$ i l'altra corda forma un angle $\beta = 53,1^\circ$ amb la vertical. Si la longitud L de la barra és de $6,1 \text{ m}$, calculeu la distància x des de l'extrem esquerre al centre de gravetat.

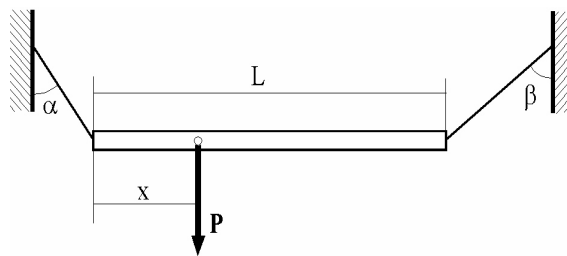


Figura 1.16: Figura de la barra de l'exercici 1.16

Observació 1.27: Si necessiteu alguna observació, consulteu les que s'han donat en els exercicis anteriors.

SOLUCIÓ: $x = 2,20 \text{ m}$

□

Exercici 1.17: Una placa prefabricada de $2 \text{ m} \times 3 \text{ m}$ i massa 10 t s'eleva a velocitat constant mitjançant tres cables que estan units en el punt D , situat sobre la vertical del centre de la placa. Determineu la tensió en cada cable.

Observació 1.28: Cal recordar qüestions bàsiques del bloc de vectors lliscants. Podeu comparar amb exercicis del capítol 2 de [13] semblants a aquest.

Observació 1.29: Si apliqueu la segona llei de Newton, l'exercici es pot resoldre amb les condicions d'equilibri estàtic.

SOLUCIÓ: $T_{AD} = T_{BD} = 2,92 \text{ t}$ i $T_{CD} = 5,27 \text{ t}$

□

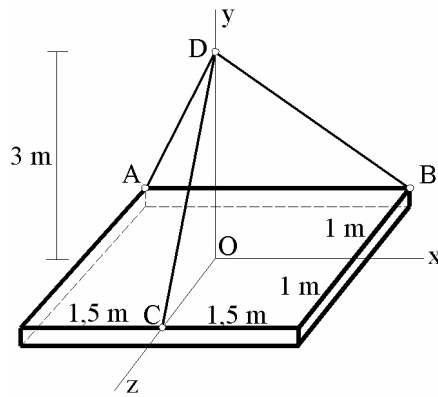


Figura 1.17: Figura de la placa amb els cables que l'elevem de l'exercici 1.17

Exercici 1.18: En la figura 1.18 es mostra la secció d'un carrer en què s'ha estès un cable entre paret i paret l'objectiu del qual és servir de suport per a un motiu d'il·luminació, dels que s'utilitzen en festes, el pes del qual és de 40 kp i que se suposarà aplicat en el centre del cable. S'observa que la fletxa s del cable val 80 cm. L'extrem dret del cable està subjectat al mur d'una balcona. Aquest té una longitud de 2 m, està construïda de maçoneria de rajola (densitat 1700 kg/m^3), i la seua secció es mostra ampliada en el dibuix de la dreta. L'estabilitat del mur està garantida pel seu propi pes i per l'ancoratge del morter de formigó de la seua base, capaç de produir un moment d'antigir màxim de 20 kp·m. Es demana: 1) La tensió a què es troba sotmès el cable. 2) Justifiqueu raonadament si bolcarà el mur. 3) Què succeiria si els instal·ladors hagueren col·locat el cable de manera que la fletxa haguera sigut només de 60 cm?

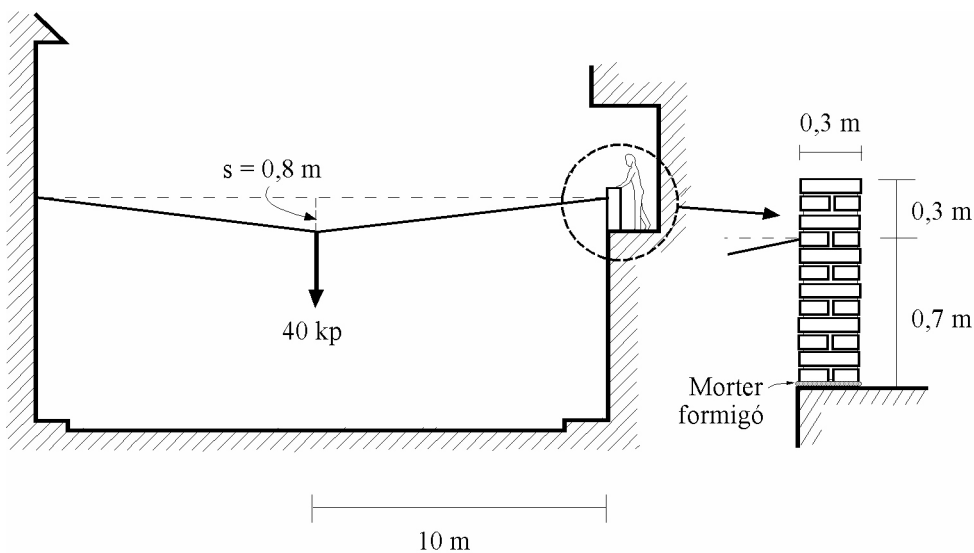


Figura 1.18: Il·lustració del cable que suporta la il·luminació de l'exercici 1.18

Observació 1.30: Aquest exercici il·lustra una situació molt semblant viscuda durant les festes de Sant Vicent del Raspeig de l'any 1997, amb resultats catastròfics.

SOLUCIÓ: 1. $T = 251 \text{ kp}$.
 2. El mur bolcarà.
 3. El mur bolcarà amb major raó

□

Exercici 1.19: El cilindre uniforme de radi a mostrat en la figura 1.19 pesava en un principi 800 N . Després de trepar un forat cilíndric, el seu pes canvia a 650 N . Els eixos dels dos cilindres són paral·lels. Suposant que el cilindre no llisca sobre la superfície horitzontal, es demana:

1. El radi del trepant.
2. La posició del centre de gravetat del cos resultant.
3. La tensió en el cable que impedeix el moviment.

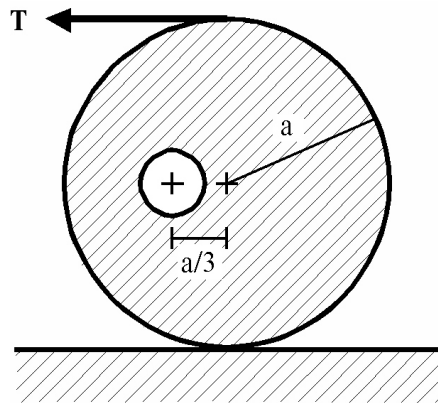


Figura 1.19: Il·lustració del cilindre de l'exercici 1.19

Observació 1.31: Tingueu en compte que la raó entre les seccions dels cilindres i els seus pesos han de ser iguals. Recordeu com es calcula el centre de gravetat d'una secció.

SOLUCIÓ: 1. $r = 0,443 \cdot a$. 2. $x_G = a/13$. 3. $T = 25 \text{ N}$

□

Exercici 1.20: Una barra AB , homogènia, que té una longitud $2L = 1,8 \text{ m}$ i pes $W = 0,3 \text{ N}$ està recolzada per l'extrem A en l'interior d'una semiesfera buida, de densitat variable, de radi $r = \sqrt{2}/2 \text{ m}$, pes P i centre de gravetat

$OG = 0,75 r$. La barra recolza en el punt C en la vora de la semiesfera (figura 1.20). Aquesta semiesfera es troba sobre un pla rugós horitzontal, estant la barra continguda en el pla vertical que passa pel centre de gravetat G de la semiesfera i pel centre de l'esfera O . El conjunt es troba en equilibri quan els angles que forme amb la vertical el radi OA i el radi OC són respectivament $\gamma = 30^\circ$ i $\beta = 60^\circ$.

1. En la barra AB calcula l'angle α que forma amb l'horitzontal i indica si el seu centre de gravetat es troba dins o fora de la semiesfera.
2. Calcula el pes P de la semiesfera així com la reacció en H perquè es produïska l'equilibri.

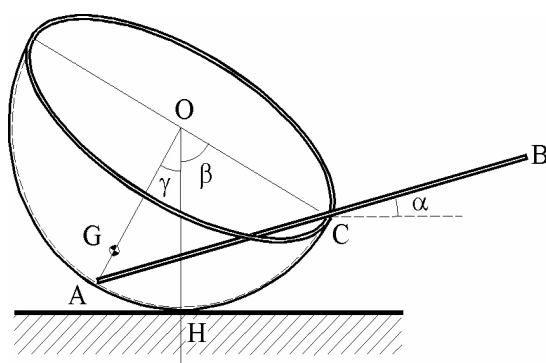


Figura 1.20: Il·lustració de la semiesfera i la barra de l'exercici 1.20

Observació 1.32: Heu de recordar elements bàsics de geometria i trigonometria per a poder plantejar la resolució d'aquest exercici.

SOLUCIÓ: 1. $\alpha = 15^\circ$ i el centre de gravetat de la barra es troba dins de la semiesfera a 0,9 m de l'extrem A.
 2. $P = 0,584 \text{ N}$ i $R_H = 0,884 \text{ N}$ □

Si encara no heu aconseguit resoldre-les, preneu nota de totes les dificultats i aprofiteu tots els recursos disponibles al vostre abast en la Universitat. La resolució d'aquestes qüestions es pot trobar en la secció 1.6 amb tots els passos detallats. **Recordeu que és possible fer els exercicis correctament i arribar a una solució lleugerament diferent com a conseqüència del truncament numèric decimal.**

1.4 Exercicis tipus examen

En aquest apartat hem seleccionat un conjunt dels exercicis proposats en els exàmens durant els últims 20 anys. S'ha organitzat de forma que la dificultat de resolució siga creixent. Poden interpretar-se com problemes llargs, encara que la seua durada no hauria de ser superior a l'hora (quaranta-cinc minuts

és un temps raonable i 30 minuts hauria de ser l'objectiu final per a resoldre aquest tipus d'exercici). Convé llegir l'apèndix A abans de començar a resoldre els exercicis d'aquesta secció.

Exercici 1.21: En la figura 1.21 es mostra la modelització d'una grua. Aquesta es pot considerar formada per una barra vertical AC encastada en el sòl, de pes 2 000 kp i longitud total 13 m, i per una barra inclinada (ploma de la grua), de pes 3 000 kp i subjectada a la barra AC per una articulació en B i un cable CE. En l'extrem F d'aquesta barra hi ha una càrrega de 4 000 kp. Es demana que calculeu:

1. La tensió en el cable CE i la reacció en l'articulació B. Resoleu-lo analíticament i gràficament.
2. Els elements de la reacció del sòl sobre la barra vertical en el punt A.

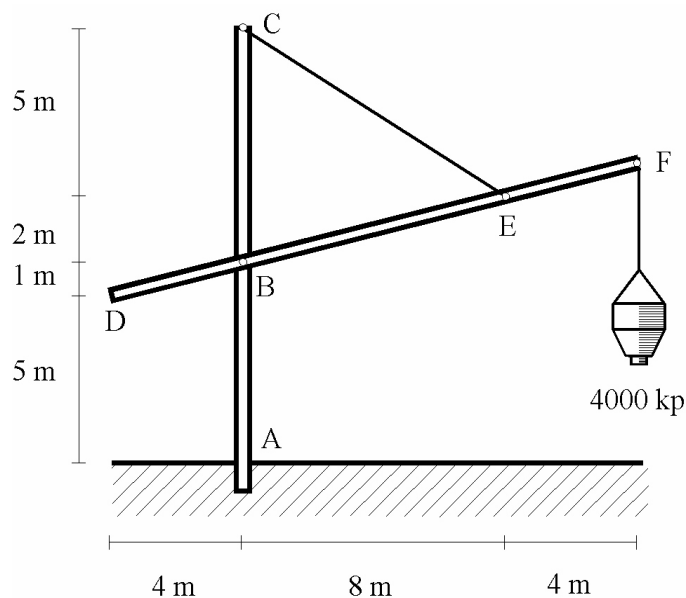


Figura 1.21: Esquema de la modelització de la grua de l'exercici 1.21

Observació 1.33: S'ha d'aplicar el concepte de polígon de forces i polígon funicular per a la resolució gràfica i d'equilibri per a l'analítica.

SOLUCIÓ: 1. $R_B = 8\,727$ kp i $T_E = 10\,108$ kp.
2. $R_A = 9\,000$ kp i $M_A = 59\,997$ kp·m

□

Exercici 1.22: En la figura 1.22 es mostra una grua de 15 m d'altura, la base de la qual està encastada en l'origen de coordenades. El cable de la grua exerceix una força de tracció F_1 , i té en el seu extrem esquerre un cos P, de

pes 1 200 kp. El cos es manté en equilibri sobre la vertical de B a una altura de 5 m. Sobre el cos actuen, a més a més de les dues forces anteriors, les forces F_2 (paral·lela a l'eix OX i F_3 (paral·lela a l'eix OY). Es demana:

1. Valors de les forces F_1 , F_2 i F_3 .
2. Valor del torçor de reacció del sòl en el punt d'encastament de la grua.
3. Eix central del sistema de forces $\{F_1, F_2, F_3\}$.

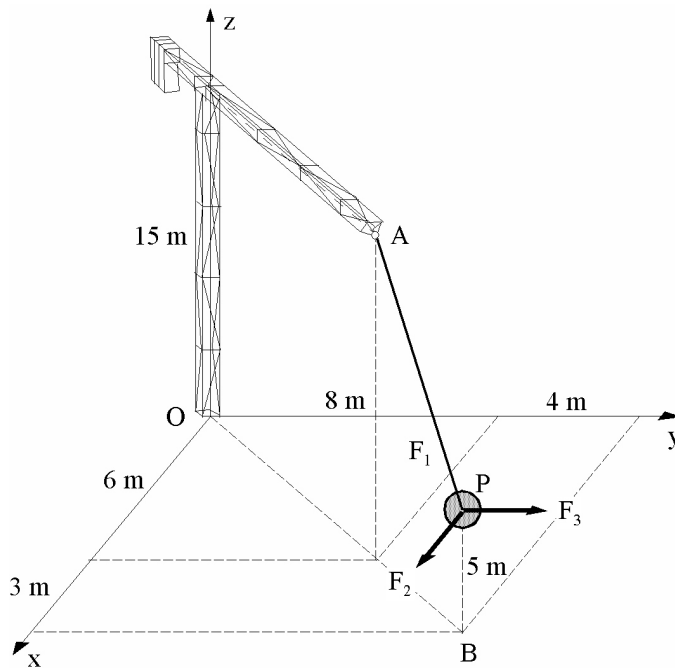


Figura 1.22: Representació gràfica de la grua de l'exercici 1.22

Observació 1.34: La física, i la ciència en general, no estan formats per continguts independents, sinó que es troben enllaçats. Això, aplicat a aquest exercici, ens indica que l'estàtica necessita altres coneixements previs com els vectors lliscants.

Observació 1.35: Recordeu el significat de sistema equilibrant i la condició que ha de complir el torçor. Fixeu-vos en la força que actua sobre la grua.

SOLUCIÓ: 1. $\mathbf{F}_1 = (-360, -480, 1\,200)$ kp; $\mathbf{F}_2 = (360, 0, 0)$ kp; $\mathbf{F}_3 = (0, 480, 0)$ kp.

2. $\mathbf{R} \equiv -\mathbf{F}_1 = (360, 480, -1\,200)$ kp; $\mathbf{M}_0 = (-1, 68; 1, 26; 0) \times 10^4$ kp·m.

3. Trivial

□

Exercici 1.23: Una antena parabòlica, el plat de la qual pesa 500 kp, es troba en l'extrem superior d'un pal vertical, tal com s'indica en la figura 1.23. El centre gravetat del plat es troba a 2 m de l'eix del pal, tal com es pot veure en el dibuix en planta del conjunt. El pal, amb un pes propi de 2 500 kp, està fixat al sòl mitjançant tres cables (AD, BF i CE), on cadascun dels seus extrems està sobre una circumferència de radi 6 m, i l'altre a distintes altures sobre el pal. L'extrem inferior està encastat a nivell del sòl sobre una llosa de formigó. Els cables es tensen amb forces iguals de 2 000 kp. Suposant que el sistema es troba en equilibri, es demana:

1. Torçor en el punt O del sistema de forces format pel pes del plat de l'antena, pes del pal i tensions dels cables.
2. Torçor de reacció que apareix en la base del pal.
3. Supposeu ara que la base del pal no està encastada sinó simplement recolzada sobre la llosa. Se suposa que la reacció de la llosa serà vertical. Calculeu, si és possible, en quin lloc del pal i amb quina direcció hauria d'insertar-se un quart cable perquè el sistema continuara estant en equilibri.

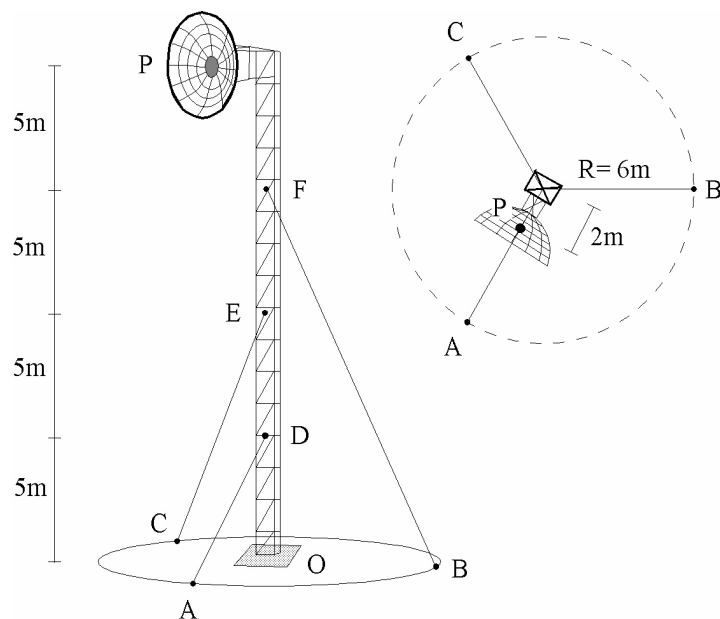


Figura 1.23: Representació gràfica de l'antena de l'exercici 1.23

Observació 1.36: Cal definir el sistema de forces i reduir-lo a l'origen de coordenades.

Observació 1.37: Recordeu el significat de sistema equilibrant i la condició que ha de complir el torçor.

SOLUCIÓ: 1. $\mathbf{R} = (650, 248, 1\,852)$ kp; $\mathbf{M}_0 = (740, 4\,040, 0)$ kp·m.

2. $\mathbf{R} = (-650, -248, -1\,852)$ kp; $\mathbf{M}_0 = (-740, -4\,040, 0)$ kp·m.

3. No és possible □

Exercici 1.24: Es té un element escultòric de pedra calcària (densitat = 2 g/cm^3) la forma del qual és paral·lelepípedica, amb un buit de forma similar, tal com s'indica en la figura 1.24. Aquesta peça es pretén penjar en una sala, de manera que la seua cara inferior estiga a 3 m respecte del sòl i paral·lela a aquest, coincidint el centre geomètric de la sala amb el de la cara superior de la peça (vegeu la figura 1.24). Es demana:

1. Si la peça ha d'estar sostinguda per una argolla en el punt O de la cara superior, de la qual ixen tres cables fins als punts A, B i C, calculeu la tensió en cadascun dels cables que subjecten la peça i la posició del punt O.
2. Seria possible suspendre la peça d'un únic cable, en lloc dels tres mencionats? Si és així, calculeu en quin punt de la cara superior hauria de subjectar-la i quant valdria la tensió en el cable del qual penja.
3. Supposeu ara que la peça se subjecta amb una barra soldada en el centre de la cara superior. Quin seria el torçor de reacció que aquesta barra hauria d'exercir per a mantenir la peça en les mateixes condicions del primer apartat?
4. Si els cables són d'acer, mòdul de Young = $2 \times 10^{11}\text{ N/m}^2$) i el seu diàmetre és de 2 cm, calculeu la deformació absoluta que pateix cadascun en la situació descrita en el primer apartat.

Observació 1.38: A vegades arquitectura i art es troben relacionades, com és el cas d'aquest exercici. Novament cal recordar conceptes relacionats amb els vectors lliscants i, a més a més, amb la geometria de masses.

Observació 1.39: Recordeu el significat de sistema equivalent i la condició que ha de complir el torçor. Reviseu la definició de la deformació en el capítol 10 de [13], per exemple.

SOLUCIÓ: 1. $T_{OA} = 2\,959$ kp; $T_{OB} = 3\,173$ kp i $T_{OC} = 4\,777$ kp.

2. En el punt O, sent la tensió en el cable de 3300 kp.

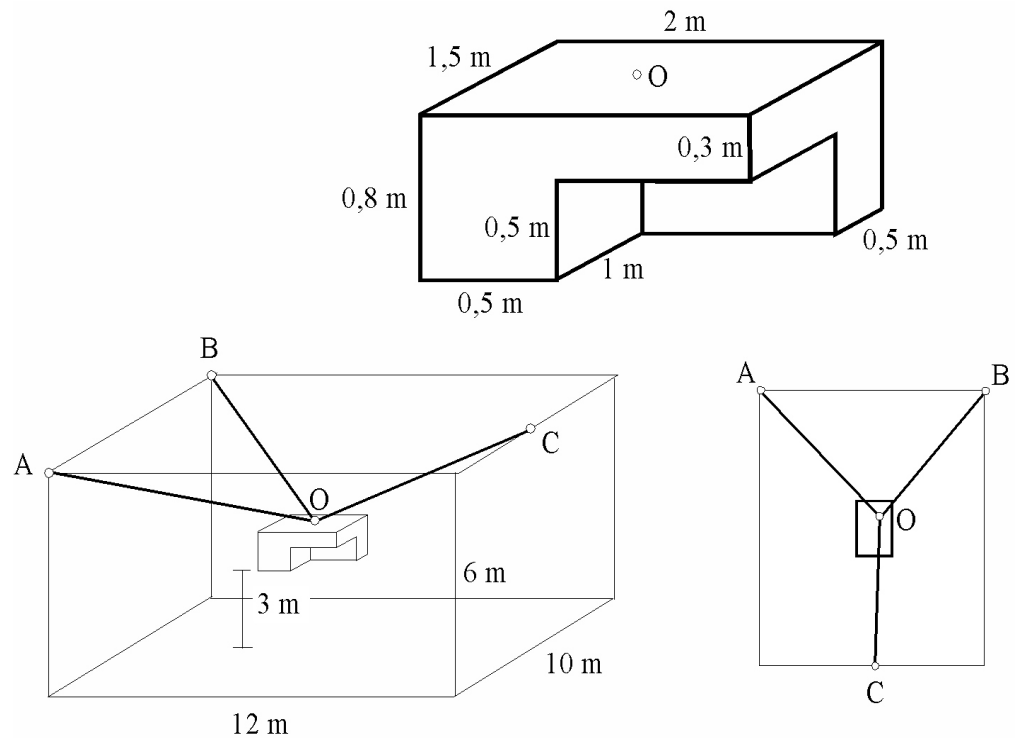


Figura 1.24: Representació gràfica de l'escultura de l'exercici 1.24

3. $\mathbf{R} = (0, 0, 3\,300) \text{ kp}$, $\mathbf{M}_{O'} = (-363, -363, 0) \text{ kp}\cdot\text{m}$.
 4. $\Delta l_{OA} = 3,7 \text{ mm}$; $\Delta l_{OB} = 3,9 \text{ mm}$ i $\Delta l_{OC} = 4,8 \text{ mm}$

□

Exercici 1.25: Sobre la porta de la figura 1.25, les dimensions de les quals s'expressen en m, actuen les forces i sistemes de forces següents: una força F de 20 kp, aplicada en un cantó de la porta; el pes de la porta, P_{porta} , de valor 30 kp; i la reacció de la frontissa, que actua al llarg d'un costat de la porta, el torçor de la qual és

$$\mathbf{R}_F = (0, -5, 10) \text{ kp}; \quad \mathbf{M}_{O_F} = (25, -2, -15) \text{ kp}\cdot\text{m}.$$

Sobre la porta es barra una barra AB els extrems de la qual no llisquen ni sobre la porta ni sobre el sòl. Es pregunta si serà efectiva aquesta barra i, si no és així, on s'hauria de col·locar. Es recorda que la barra només pot treballar a compressió.

Observació 1.40: Aquest exercici presenta una situació relacionada amb l'edificació i l'estàtica.

Observació 1.41: S'han d'aplicar conceptes bàsics del bloc de vectors lliscants i d'estàtica.

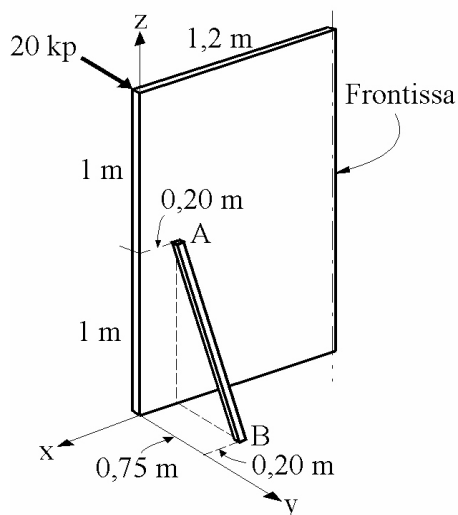


Figura 1.25: Figura de la porta de l'exercici 1.25

SOLUCIÓ: No és efectiva i el punt de contacte barra-porta és $A'(-1, 0, 1)$ \square

Exercici 1.26: Sobre un generador eòlic, vegeu la figura 1.26, actuen les forces següents: a) els pes dels elements motors i compensadors P_1 , de valor 5 t, actuant la resultant a una distància de 2,5 m de l'eix de la torre; b) el pes de l'hèlice, de valor 2500 kp, actuant a una distància de 5 m de l'eix de la torre; c) el pes de la torre P_2 , de valor 10 t, actuant en el seu eix de simetria; d) la força del vent sobre la torre, sent la pressió d'aquest F_p 10 kp/m², actuant sobre una àrea equivalent a la secció vertical de la torre (un trapezi isòsceles de 6 m de base major, 3 m de base menor i 40 m d'altura); e) quan l'hèlice està travada en una certa posició, el vent produeix sobre el sistema una força resultant de 2 t i un moment de valor 4 t·m, ambdós en la direcció de l'eix de l'hèlice, que a la vegada està orientat segons l'eix OX. Calculeu:

1. Torçor del sistema en l'origen de coordenades O.
2. Invariants del sistema.
3. Eix central.
4. Torçor de reacció que el sòl ha d'exercir sobre la torre.
5. Es podria anul·lar el sistema inicial amb una única força? I amb una força i un parell?

Observació 1.42: Una qüestió fonamental en l'arquitectura és el càlcul del sistema equilibrant a un altre donat (per exemple, torçor de reacció en el punt d'encastament).

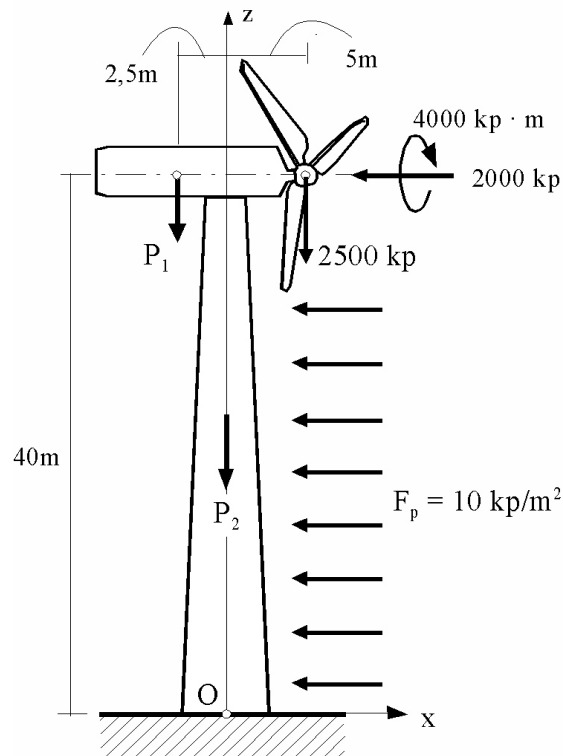


Figura 1.26: Il·lustració del generador eòlic de l'exercici 1.26

Observació 1.43: S'han d'aplicar conceptes bàsics del bloc de vectors lliscants i d'estàtica. Recordeu l'àrea d'un trapezi.

- SOLUCIÓ: 1. $\mathbf{R} = (-3, 8; 0; -17, 5) \cdot 10^3$ kp; $\mathbf{M}_O = (-4, -112, 0) \cdot 10^3$ kp·m.
 2. $I_1 = \mathbf{R}$; $I_2 = 0, 489 \cdot 10^3$ kp·m.
 3. $y = 0, 218$ m, $4, 61 \cdot x - z = -29, 5$.
 4. $\mathbf{R}_R = (3, 8; 0; 17, 5) \cdot 10^3$ kp, $\mathbf{M}_{O_R} = (4, 112, 0) \cdot 10^3$ kp·m.
 5. No i sí, respectivament

□

Exercici 1.27: Atesa la secció que mostra la figura 1.27, es demana:

1. En quin punt de la línia AB s'hauria de penjar perquè aquest costat romanguera horitzontal?
2. Calculeu els moments d'inèrcia i eixos principals centrals de la secció.
3. Supposeu que la secció recolza sobre el sòl per la seua part corba, en quin punt concret d'aquesta part recolzaria la secció en l'equilibri? Raoneu-ho. Es considera que el gruix de la secció és suficient per a mantenir-la vertical sobre el sòl.

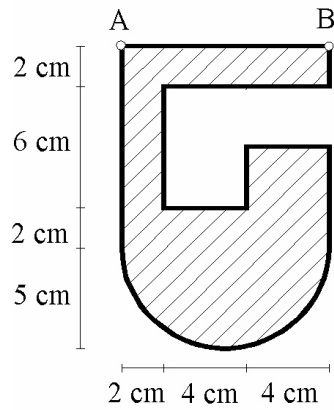


Figura 1.27: Il·lustració de la secció de l'exercici 1.27

Observació 1.44: Aquest és un exemple d'un exercici que relaciona elements geomètrics, com el centre de gravetat, i l'equilibri en un sistema físic.

Observació 1.45: S'han d'aplicar els conceptes del bloc de geometria de masses i d'estàtica.

SOLUCIÓ: 1. A 5,12 cm del punt B cap a l'esquerra.

2. $I_{x_{0G}} = 1934 \text{ cm}^4$; $I_{y_{0G}} = 890 \text{ cm}^4$; $\theta = 3,9^\circ$.

3. S'inclinaria respecte de la vertical un angle de $3,2^\circ$, en el sentit antihorari \square

Exercici 1.28: Atesa la secció que mostra la figura 1.28, la densitat superficial de la qual és de 20 kp/m^2 , es demana:

1. Coordenades del centre de gravetat.
2. Eixos i moments d'inèrcia principals centrals.
3. Si la secció recolza sobre un sòl horitzontal perquè gire lliurement, quin angle formarà el segment OA respecte de la vertical?
4. Quina força horitzontal (valor i sentit), aplicada en el punt B, s'hauria d'aplicar per a mantenir la secció amb l'eix OA vertical?

Observació 1.46: Aquest és un altre exemple d'un exercici que relaciona elements geomètrics, com el centre de gravetat, i l'equilibri en un sistema físic.

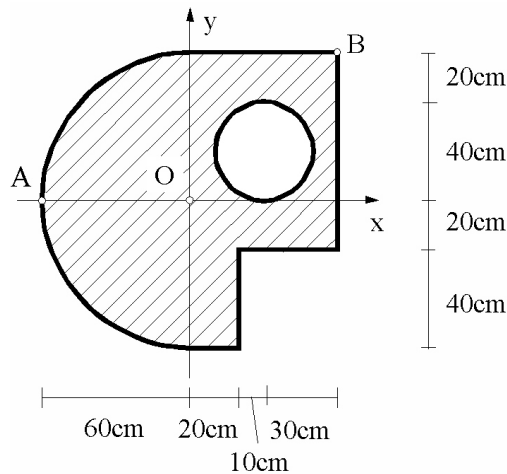


Figura 1.28: Il·lustració de la secció de l'exercici 1.28

Observació 1.47: S'han d'aplicar els conceptes del bloc de geometria de masses i d'estàtica.

SOLUCIÓ: 1. $G(-2,97; 3,89)$ cm.

2. $I_{x_{0G}} \approx 1,184 \cdot 10^7 \text{ cm}^4$; $I_{y_{0G}} \approx 7,948 \cdot 10^6 \text{ cm}^4$; $\theta \approx -40,8^\circ$.

3. $\alpha \approx 52,6^\circ$.

4. $F = 0,495 \text{ kp}$

□

Exercici 1.29: En la figura 1.29 es mostra un panell, la densitat superficial del qual és de 200 kp/m^2 , col·locat com a reclam en una botiga de còmics. S'indiquen les dimensions en cm. Sobre el panell apareix imprès la figura d'un cèlebre gos. El panell està subjectat en els punts A i B per sengles cables. El cable A forma un angle de 30° amb la vertical, mentre que el cable B forma un angle desconegut α . Es demana:

1. El valor d'aquest angle perquè el panell romanga horitzontal, així com els valors de les tensions que exerceixen els cables sobre el panell.
2. La matriu d'inèrcia del panell en el punt A, respecte d'uns eixos OX (horitzontal) i OY (vertical).
3. El moment d'inèrcia del panell respecte d'un eix que coincidisca amb el cable A.

Observació 1.48: Les observacions de l'exercici 1.28 són aplicables en aquest exercici també.

SOLUCIÓ: 1. $\alpha = 30,4^\circ$; $T_A = 303,8 \text{ kp}$; $T_B = 300,2 \text{ kp}$.

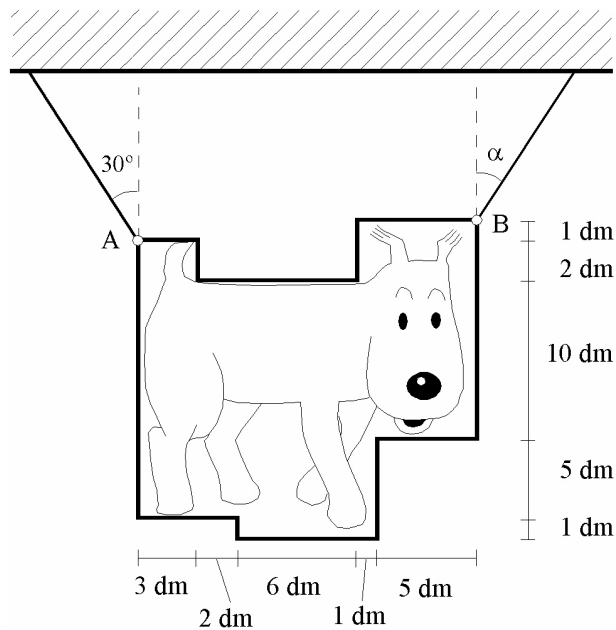


Figura 1.29: Il·lustració del panell publicitari de l'exercici 1.29

2. $I_{x_A} = 24\,661 \text{ dm}^4$; $I_{y_A} = 23\,391 \text{ dm}^4$; $P_{x_A y_A} = -16\,495 \text{ dm}^4$.
 3. $I_{V_A} = 9\,423 \text{ dm}^4$

□

Exercici 1.30: En la figura 1.30 es mostra la planta i secció d'una llosa de formigó la densitat de la qual és 2500 kg/m^3 , proveïda de quatre orificis circulars de 40 cm de diàmetre. En la part esquerra es mostra la llosa recolzada sobre un talús, on la zona més estreta vola sobre aquest una distància L . Es demana: 1) El valor màxim de L perquè la llosa no bolque. 2) El valor dels moments d'inèrcia i els eixos principals centrals de la figura que representa la planta de la llosa.

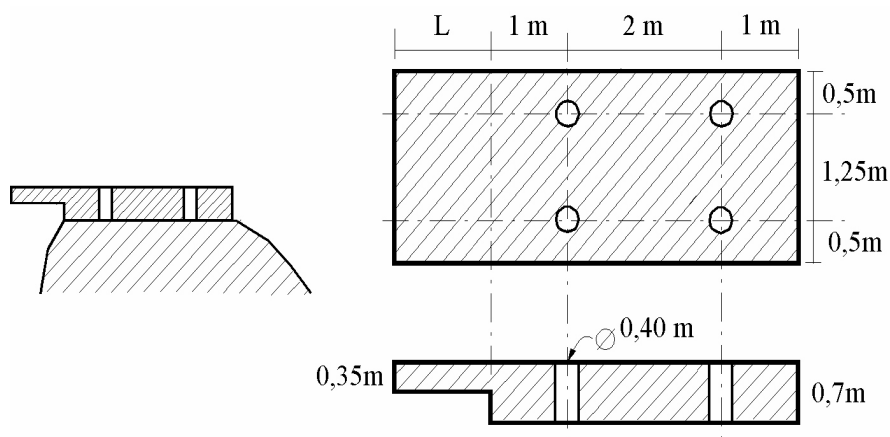


Figura 1.30: Il·lustració de la llosa de formigó de l'exercici 1.30

Observació 1.49: Les observacions de l'exercici 1.28 són aplicables en aquest exercici també.

SOLUCIÓ: 1. $L = 5,50$ m.

2. $I_{x_0_G} = 156,4 \text{ m}^4$; $I_{y_0_G} = 8,82 \text{ m}^4$

□

Exercici 1.31: La grua de la torre de la figura 1.31 té un contrapés (situat en A) de valor 31 kN; el motor M pesa 4,5 kN; la ploma AG de la grua pesa 36 kN, podent-se considerar aplicada aquesta força en el punt G; finalment, el pes de la torre és de 23 kN, i es considera aplicat en el seu punt mitjà.

1. Si la torre està alçant una càrrega de 9 kN, calculeu i representeu les forces de reacció en els recolzaments D i E en funció de la distància x a la qual s'alça la càrrega.
2. S'estipula que les forces de reacció en D i E no poden ser menors de 4,5 kN, per a evitar el bolcament de la grua, mantenint a més un cert marge de seguretat. Tenint en compte açò, es demana representar la càrrega màxima que pot alçar la grua, $Q_{m\grave{a}x}$, en funció de la distància x ($5 \leq x \leq 35$ m).

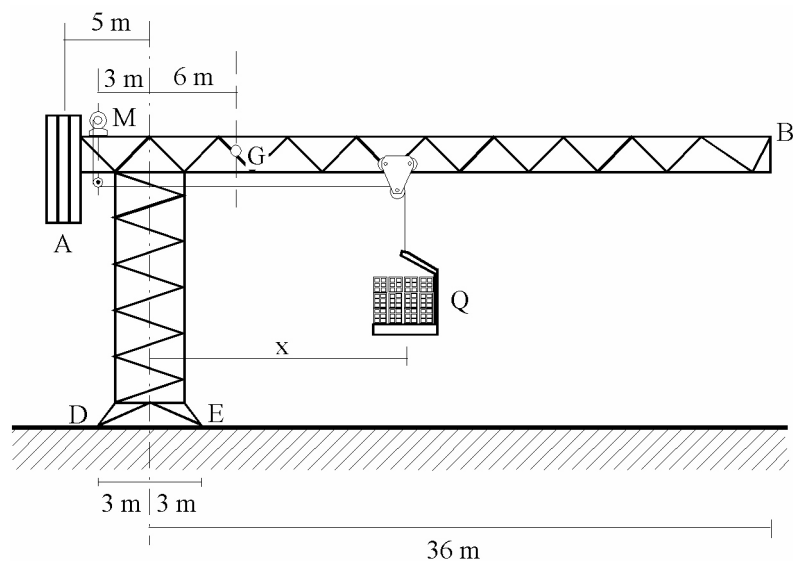


Figura 1.31: Il·lustració de la grua de l'exercici 1.31

Observació 1.50: Aquest és un exercici imprescindible per a qualsevol que es dedique a l'edificació.

SOLUCIÓ: 1. $R_E(x) = 1,5 \cdot x + 59,7$; $R_D(x) = -1,5 \cdot x + 43,8$ per a $x \geq 3$.

2. $Q_{m\grave{a}x} = 209/(x - 3)$ per a $5 \leq x \leq 35$ m

□

Abans de consultar la solució detallada dels exercicis en la secció 1.7, tracteu de resoldre'ls, preneu nota de les dificultats que hi heu trobat, identifiqueu els tipus d'errors que heu fet i aprofiteu tots els recursos disponibles al vostre abast en la Universitat. Podeu verificar la resolució d'aquests exercicis en la secció 1.7 amb tots els passos detallats.

1.5 Exercicis tipus problema investigació

Aquest tipus d'exercici és una metodologia activa d'ensenyament on l'alumnat es converteix en el protagonista del seu propi aprenentatge. Aquesta estratègia també pot anomenar-se aprenentatge basat en problemes, encara que altres autors, o nosaltres mateixos, parlen de problema investigació. L'objectiu és trobar situacions properes a l'entorn professional de l'arquitectura i dissenyar problemes oberts per plantejar a l'alumnat. En aquest cas, una seqüència del procés d'ensenyament i aprenentatge que pot establir-se és:

1. **Presentació del problema.** El problema plantejat està relacionat amb situacions professionals reals o versemblants que siguin d'interès per a l'alumnat. A més a més, el problema respon a objectius propis de la matèria i s'adapta al nivell de competències i habilitats de l'alumnat que hi treballarà.
2. **Delimitació del problema.** S'ha de garantir que l'alumnat comprèn l'exercici i el treball que ha de fer. En aquesta fase, s'analitzen quins són els coneixements que té l'alumnat en relació amb el problema i quines són les necessitats d'aprenentatge, és a dir, quins són els aspectes desconeguts i quines les preguntes clau que caldrà respondre.
3. **Recerca documental.** Planificació del treball que cal fer per tal de resoldre les necessitats de l'aprenentatge: localització de la informació rellevant, distribució de les tasques en el grup de treball i pensar quins recursos s'utilitzaran per a trobar la solució al problema plantejat.
4. **Avaluació de l'experiència.** És una reflexió de tot el procediment on s'ha d'avaluar cada estudiant individualment, el grup de treball i la tasca del professorat. S'ha d'aclarir que l'adquisició dels coneixements d'aquesta forma no és suficient per a aconseguir els objectius de la matèria. Cal l'estudi individual de cada estudiant.

Aquest mètode se centra en l'alumnat com a individu i com a membre d'un grup, d'acord amb el que estableix el procés de convergència europea de l'educació superior. Per a dur a terme aquesta metodologia és imprescindible una més gran implicació de l'alumnat. A continuació proposem alguns exemples que s'han utilitzat per a introduir aquesta estratègia d'aprenentatge.

Exercici 1.32: *L'enginyera d'una obra necessita determinar les dimensions i les característiques del material de la base on s'haurà de fixar una grua. S'exigeix un coeficient de seguretat d'acord a les normes de l'edificació.*

Exercici 1.33: *Una empresa d'enginyeria vol construir una presa de gravetat en el terme municipal de Mutxamel. La zona on es farà la construcció presenta vents forts i com a condició de seguretat s'ha exigut un coeficient 3. Es demana que la presa de gravetat suporti la força de l'aigua gràcies al seu propi pes.*

Exercici 1.34: *En una estació depuradora d'aigües residuals de Mutxamel, la línia d'aigua, no la línia de fangs, s'inicia després de l'entrada de l'aigua pel col·lector general, segueix una fase de tractament previ (desbast, desarenatge i separació de greixos) i d'aquí l'aigua passa als decantadors primaris abans de produir-se el tractament biològic; a continuació passa als decantadors secundaris i arriba finalment l'aigua tractada a ser utilitzada per al reg de l'horta, prèvia cloració. En un dels trajectes anteriors es comuniquen dos dels elements de la depuradora amb una canonada de conducció d'aigua. La instal·lació es realitzarà mitjançant un sistema de cables.*

L'alumnat ha de pensar i reflexionar sobre com ha d'enfrontar-se a una possible situació real. Lògicament la solució no és única i caldrà prendre les decisions òptimes. Aquesta proposta de problema investigació s'integra en el bloc temàtic d'estàtica, però necessita d'altres blocs com sistemes de vectors lliscants i geometria de masses per a trobar les possibles solucions. Els objectius generals són:

- Comprendre el caràcter vectorial de les forces en qualsevol tipus d'estructura, les seues propietats i la necessitat de saber les operacions de l'anàlisi vectorial.
- Comprendre el significat d'equilibri de forces actuant sobre qualsevol tipus d'estructures i aplicació dels conceptes de sistemes equivalents i centre de gravetat.
- Intervenir en projectes tècnics amb autonomia i confiança i participar en la planificació i desenvolupament de solucions estructurals en equip.
- Identificar les condicions que ha de complir la possible solució d'acord amb les normes establides per l'ajuntament i la legalitat vigent del codi tècnic de l'edificació.

Els objectius específics són:

- Saber i dominar l'àlgebra de les magnituds vectorials (particularment, la força i el moment d'una força).
- Obtenir les forces i els seus punts d'aplicació, identificar el tipus de sistema i els seus elements de reducció.
- Comprendre els principis fonamentals de l'estàtica i l'aplicació en la resolució de casos pràctics.

- Plantejar-se solucions alternatives mitjançant lleugeres modificacions de les magnituds físiques, dels materials dels cables i estructurals, per a comparar-les i triar la que consideren més adequada.

Com a ajuda per entendre l'aprenentatge basat en problemes i el seu significat, podeu consultar l'apèndix B on es donen les característiques bàsiques d'aquesta metodologia.

1.6 Resolució dels exercicis tipus qüestió

Exercici 1.1 Una grua fixa té una massa de 2 000 kg i es fa servir per aixecar una càrrega P de 2 400 kp (figura 1.1 de la pàgina 2). El centre de gravetat de la grua és G. Determineu les reaccions en els punts de suport.

La condició d'equilibri implica que el torçor del sistema siga nul. És a dir, que tant la resultant com el moment resultant siguen nuls. Com que l'enllaç A és fix, hi haurà una reacció horitzontal R_{Ax} i una altra vertical R_{Ay} . Mentre que com l'enllaç B és mòbil només hi haurà una reacció horitzontal R_{Bx} . Per tant el diagrama de sòlid lliure serà el de la figura 1.32:

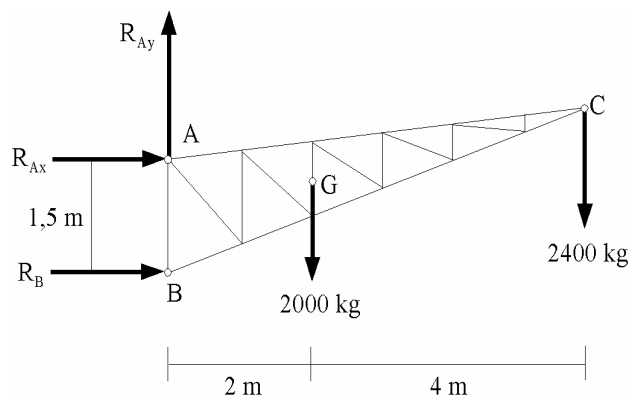


Figura 1.32: Diagrama de sòlid lliure de la grua amb les reaccions i càrregues aplicades de l'exercici 1.1

I les equacions de l'equilibri serien les següents:

$$\sum_{i=1}^2 F_{ix} = 0 = R_{Bx} - R_{Ax}$$

$$\sum_{i=1}^3 F_{iy} = 0 = R_{Ay} - 2\,000 - 2\,400$$

Prenent moments respecte del punt A, sent positius els que tenen el moviment de les agulles del rellotge, s'obtidria:

$$\sum_{i=1}^5 M_{iA} = 0 = R_{Ax} \cdot 0 + R_{Ay} \cdot 0 + 2\,000 \cdot 2 + 2\,400 \cdot 6 - R_{Bx} \cdot 1,5$$

Resolent el sistema d'equacions que s'ha obtingut, les solucions serien les següents:

$$R_{Ay} = 4400 \text{ kp}$$

$$R_{Ax} = R_{Bx} \approx 12267 \text{ kp}$$

Exercici 1.2 La ploma de la grua de la figura 1.2 de la pàgina 3 té una longitud de 12 m i un pes de 10 kN. La distància entre el punt de suport A i el centre de gravetat de la ploma és de 6 m. Es demana determinar, per a la situació que es mostra en la figura, la tensió T en el cable i la reacció en A.

Les forces que actuen sobre la grua són:

1. La càrrega de 25 kN, en el punt B.
2. El pes de la ploma de la grua, de valor 10 kN, que actua en el centre de gravetat G.
3. La reacció en A que tindrà dos components per ser un enllaç fix.
4. La tensió del cable T, que actua també en el punt B.

Per tant el diagrama de sòlid lliure serà el de la figura 1.33:

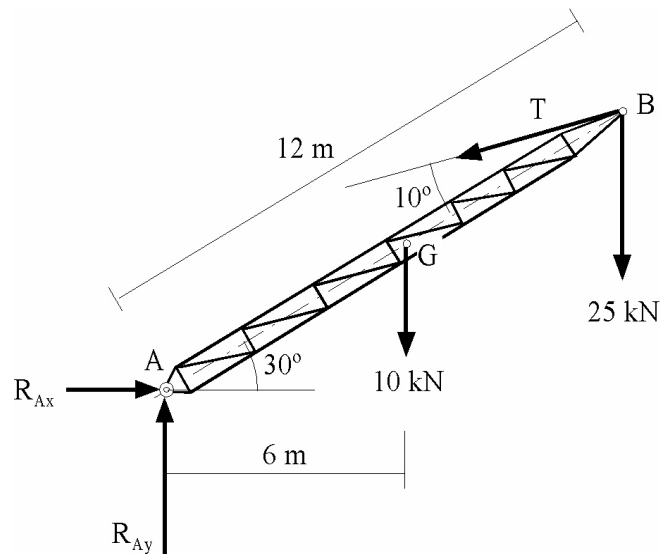


Figura 1.33: Diagrama de sòlid lliure de la grua amb les reaccions i càrregues aplicades de l'exercici 1.2

Les equacions d'equilibri seran les següents:

$$\sum_{i=1}^2 F_{ix} = 0 = R_{Ax} - T \cdot \cos 20^\circ$$

$$\sum_{i=1}^4 F_{iy} = 0 = R_{Ay} - 10 - 25 - T \cdot \sin 20^\circ$$

Prenent moments respecte del punt A, sent positius els que tenen el moviment de les agulles del rellotge, s'obtidria:

$$\sum_{i=1}^5 M_{i_A} = 0 = R_{A_x} \cdot 0 + R_{A_y} \cdot 0 + 10 \cdot \overline{AG} \cdot \cos 30^\circ + 25 \cdot \overline{AB} \cdot \cos 30^\circ - T \cdot 12 \cdot \sin 10^\circ$$

Resolent el sistema d'equacions anterior, s'obtidrien les solucions següents:

$$T \approx 149,6 \text{ kN}, \quad R_{A_y} \approx 86,2 \text{ kN}, \quad R_{A_x} \approx 140,6 \text{ kN}$$

on \overline{AG} i \overline{AB} són 6 m i 12 m, respectivament.

Exercici 1.3 Calculeu gràficament el pes del cilindre de la figura 1.3 de la pàgina 4, si se sap que la força necessària per a sobrepassar l'esglaó és major o igual que 525 kp. El radi del cilindre és de 60 cm.

En el moment de començar a sobrepassar l'esglaó el cilindre no exerceix cap força sobre el sòl horitzontal. És a dir: $R_B = 0$. En aquest moment, el sistema està format per tres forces: F , P (pes del cilindre) i R_C , les quals s'han de tancar en el mateix punt (en aquest cas el punt A'). La recta $\overline{A'C}$ ens indica la direcció de la reacció R_C (vegeu la figura 1.34).

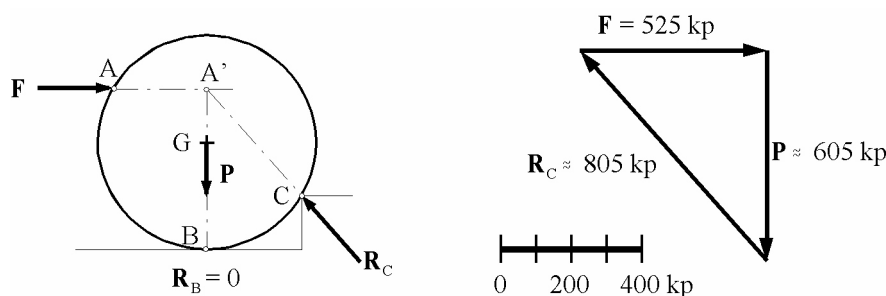


Figura 1.34: Diagrama de sòlid lliure i resolució gràfica de l'exercici 1.3

A la part dreta de la figura 1.34 s'ha dibuixat el polígon de forces començant per la força F , horitzontal; a continuació el pes P , vertical; i s'ha de tancar amb la reacció R_C , que té la direcció obtinguda prèviament $\overline{A'C}$. D'acord a l'escala de forces utilitzada, el pes del cilindre és de 605 kp i la reacció en el punt C és de 805 kp.

Exercici 1.4 Calculeu la tensió T i la reacció en O per a la plantilla corba AOBC de la figura 1.4 de la pàgina 4, si $\alpha = 10^\circ$, $r = 6 \text{ cm}$ i $P = 100 \text{ kp}$. El pes de la plantilla se suposa negligible. Resoleu el problema analíticament i gràficament.

Sobre la plantilla de la figura 1.4 actuen tres forces:

1. La reacció en l'articulació O, que té dos components.
2. El pes P aplicat en el punt C.
3. La tensió exercida per la corda en el punt A.

4. El pes de la plantilla s'aplicaria sobre el seu centre de gravetat, però com que se suposa negligible no la considerarem.

El diagrama de sòlid lliure es mostra en la figura 1.35.

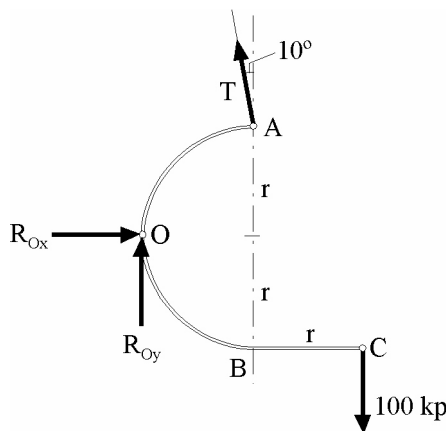


Figura 1.35: Diagrama de sòlid lliure de la plantilla amb les reaccions i càrregues aplicades de l'exercici 1.4

Les condicions d'equilibri seran les següents:

$$\sum_{i=1}^2 F_{i_x} = 0 = R_{O_x} - T \cdot \sin 10^\circ = R_{O_x} - 0,1736 \cdot T$$

$$\sum_{i=1}^3 F_{i_y} = 0 = R_{O_y} + T \cdot \cos 10^\circ - 100 = R_{O_y} + 0,9848 \cdot T - 100$$

Prenent moments respecte del punt A, sent positius els que tenen el moviment de les agulles del rellotge, s'obtidria:

$$\sum_{i=1}^3 M_{i_A} = 0 = R_{O_y} \cdot r - R_{O_x} \cdot r + 100 \cdot r$$

Resolent el sistema d'equacions anterior, s'obtidrien les solucions següents:

$$T \approx 172,7 \text{ kp}, \quad R_{O_x} \approx 30,0 \text{ kp}, \quad R_{O_y} \approx -70,0 \text{ kp}.$$

Mentre que l'angle que fa la reacció en O amb l'eix horitzontal OX seria de:

$$\tan \theta = \frac{70,0}{30,0} \longrightarrow \theta \approx 66,8^\circ.$$

Com que són tres les forces actuant, i totes tres coplanàries, si la plantilla està en equilibri han de ser concurrents, on D és el punt de concurrència (il·lustració (a) de la figura 1.36. Sabent les direccions de les forces P i T, es pot dibuixar el polígon de forces, il·lustració (b) de la figura 1.36, on l'escala de forces és la indicada. D'acord amb aquesta escala, els valors de les dues forces serien $R_O = 76 \text{ kp}$ i $T \approx 170 \text{ kp}$.

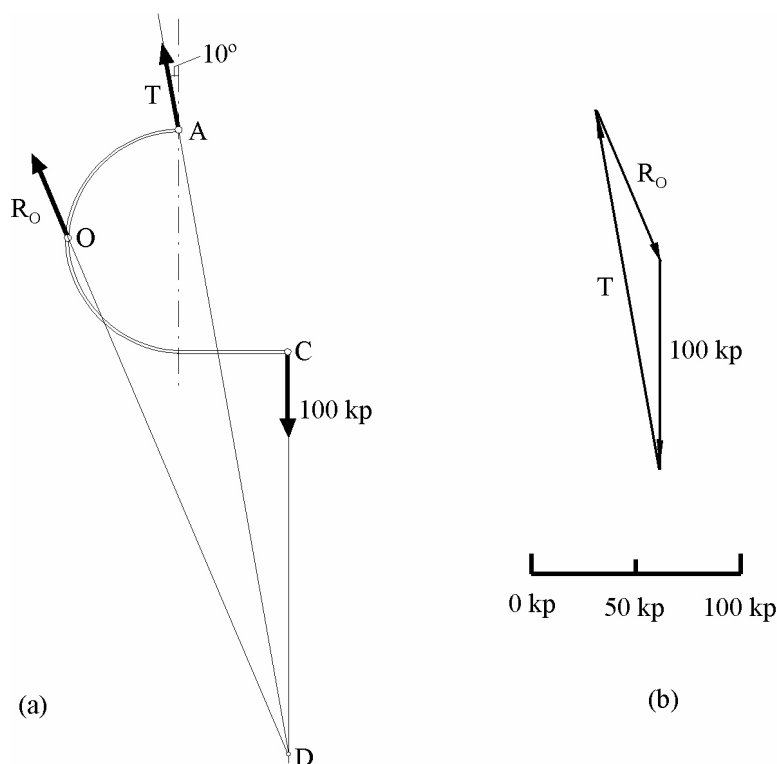


Figura 1.36: Il·lustracions de la resolució gràfica de l'exercici 1.4

Exercici 1.5 Determineu gràficament la magnitud, la direcció, el sentit i la posició de la resultant del sistema de forces coplanàries de la figura 1.5 de la pàgina 5.

La resolució d'aquest exercici implica la determinació gràfica del vector força resultant del sistema i de la línia d'acció de la resultant (és a dir, de l'eix central del sistema, capítol 9 de [13]). Per tal d'obtindre-les, cal representar el polígon de forces i el polígon funicular d'aquest últim.

El procés es pot resumir en els passos següents (capítol 9 de [13]):

1. Construcció del polígon de forces.
2. Elecció del pol i traçat dels raigs polars.
3. Sobre el dibuix del sistema de forces es comencen a traçar les paral·leles als raigs polars: es comença per la recta **a**, que es traça per un punt arbitrari. Pel punt de tall de la recta **a** amb la línia d'acció de la força horitzontal de 500 kp es traça la segona recta **b**. Pel punt de tall de la recta **b** amb la línia d'acció de la primera força vertical de 1000 kp es traça la **c**, i així successivament fins a exhaurir tots els radis polars (dibuix esquerre de la figura 1.37).
4. Es perllonguen les rectes **a** i **g** (primera i última de la seqüència de raigs polars), on el punt de tall és un punt de la línia d'acció de la resultant.
5. Es dibuixa una paral·lela a la resultant que passe per aquest punt. Aquest serà l'eix central. La resultant es pot dibuixar al llarg d'aquest eix central (dibuix dret de la figura 1.37).

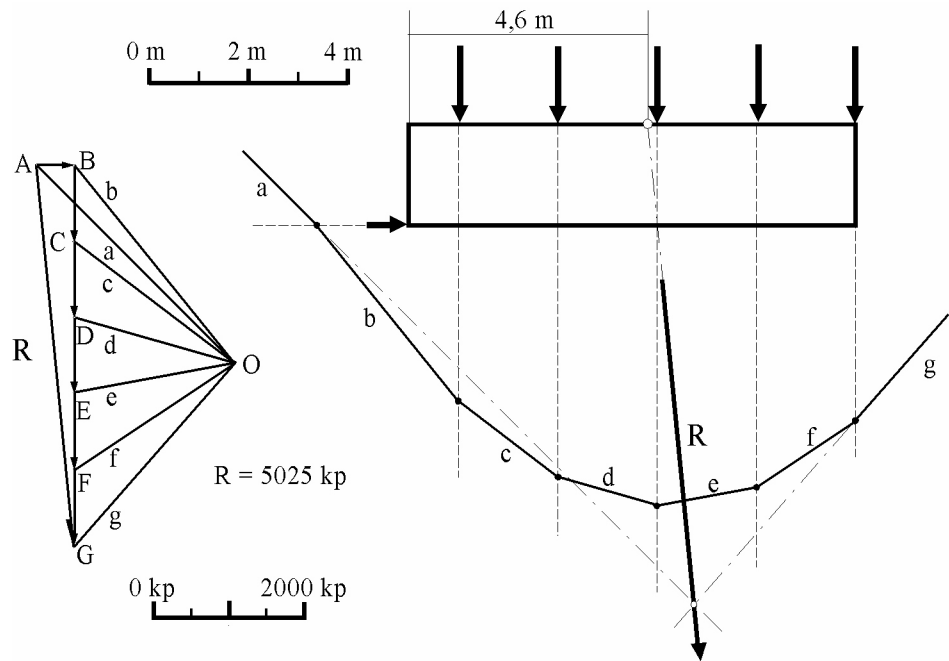


Figura 1.37: Il·lustracions de la resolució gràfica de l'exercici 1.5

D'acord a l'escala de la resolució gràfica de la figura 1.37, el valor de la força resultant seria de 5 025 kp i el punt d'aplicació d'aquesta es trobaria a 4,6 m de l'extrem esquerre de la peça.

Exercici 1.6 Determineu gràficament el centre de gravetat de la secció plana que es mostra en la figura 1.6 de la pàgina 5.

Com que el centre de gravetat és el lloc per on passa la resultant de les forces pes que actuen sobre les diferents part d'un cos, es pot determinar aquest punt gràficament i obtenir la línia d'acció d'aquesta resultant en dues direccions perpendiculars entre si.

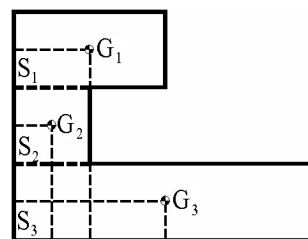


Figura 1.38: Especejament de la secció plana de l'exercici 1.6

Dividirem la secció en tres trossos i prendrem l'origen de coordenades en el vèrtex inferior esquerre d'aquesta (figura 1.38):

1. Un rectangle de base 20 cm , altura 10 cm, i àrea S_1 200 cm². Les coordenades del centre de gravetat són $G_1(10, 25)$ cm.
2. Un quadrat el costat del qual és 10 cm, i àrea S_2 100 cm². Les coordenades del centre de gravetat són $G_2(5, 15)$ cm.

3. Un rectangle de base 40 cm, altura 10 cm, i àrea S_3 400 cm². Les coordenades del centre de gravetat són $G_3(20, 5)$ cm.

En la figura 1.39 els pesos de cada tros s'han dibuixat proporcionals a les àrees respectives, i amb l'escala que s'hi indica.

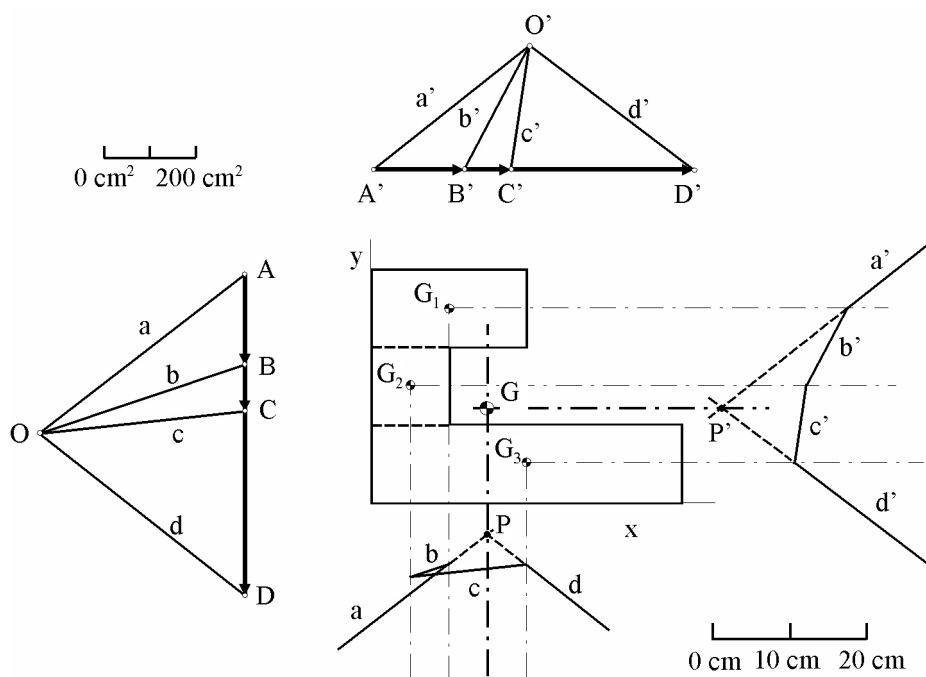


Figura 1.39: Resolució gràfica de l'exercici 1.6

Construint els dos polígons funiculars s'obtenen les dues línies d'acció de la resultant que passen pel punt de tall de les rectes **a** i **d** i **a'** i **d'**, respectivament. El punt on es tallen les dues direccions és el centre de gravetat de la secció, les coordenades de la qual són: $G(15, 0; 12, 5)$ cm.

Exercici 1.7 El semicilindre de la figura 1.7 de la pàgina 6 pesa 1 kN. Sabent que no hi ha fregament entre el pla inclinat i el semicilindre, determina la força horitzontal necessària per a l'equilibri.

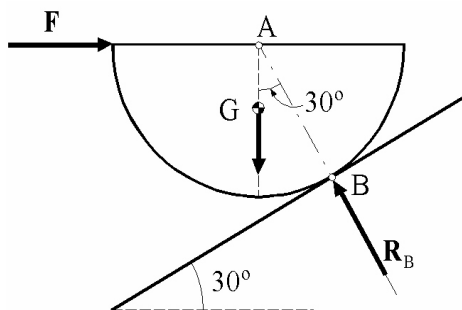


Figura 1.40: Diagrama de sòlid lliure del semicilindre corresponent a l'exercici 1.7

Sobre el semicilindre actuen tres forces (la figura 1.40 representa el diagrama de sòlid lliure): la força F horitzontal, el pes del semicilindre P aplicat en

el seu centre de gravetat, i la reacció R_B del pla inclinat sobre el semicilindre.

Com que són tres les forces, i totes tres coplanàries, si el semicilindre està en equilibri han de ser concurrents, on A és el punt de concurrència. Sabent les direccions de les forces R_B i F , es podria dibuixar el polígon de forces tancat i obtenir gràficament la solució. Però aquest exercici es resoldrà analíticament aplicant la condició d'equilibri. Les equacions serien:

$$\sum_{i=1}^2 F_{i_x} = 0 = -R_B \cdot \cos 30^\circ + F$$

$$\sum_{i=1}^2 F_{i_y} = 0 = R_B \cdot \sin 30^\circ - P \longrightarrow R_B = \frac{P}{\sin 30^\circ} = 2 \text{ kN}$$

Per tant, la força F que s'ha d'aplicar seria $F = 2 / \tan 30 \approx 3,5 \text{ kN}$.

Exercici 1.8 Una esfera uniforme de pes P i radi R està subjectada per un cable unit a una paret sense fregament a una distància L per damunt del centre de gravetat de l'esfera, com s'indica en la figura 1.8 de la pàgina 7. Determineu:

1. La tensió T del cable.
2. La reacció R_B exercida per la paret sobre l'esfera.

Sobre l'esfera actuen tres forces (la figura 1.41 representa el diagrama de sòlid lliure): la reacció R_B horitzontal, el pes de l'esfera P aplicat en el seu centre de gravetat C, i la tensió T del cable.

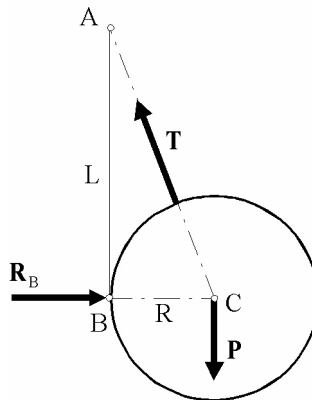


Figura 1.41: Diagrama de sòlid lliure de l'esfera corresponent a l'exercici 1.8

Com que es tracta d'un sistema de forces concurrents en el punt C, la condició d'equilibri es redueix al fet que el polígon de forces siga tancat. Les equacions serien les següents:

$$\sum_{i=1}^2 F_{i_x} = 0 = T \cdot \cos \alpha - P \longrightarrow T = \frac{P}{\cos \alpha}$$

$$\sum_{i=1}^2 F_{i_y} = 0 = R_A - T \cdot \sin \alpha \longrightarrow R_A = P \cdot \tan \alpha$$

on α és l'angle definit per \widehat{CAB} i es pot obtenir aplicant nocions de trigonometria: $\cos \alpha = L/\sqrt{L^2 + R^2}$ i $\tan \alpha = R/L$. Per tant, les solucions que s'obtenen són:

$$T = \frac{P}{L} \sqrt{L^2 + R^2}; \quad R_B = \frac{P \cdot R}{L}$$

Exercici 1.9 Una presa de gravetat suporta la força de l'aigua gràcies al seu propi pes. La secció de la presa es mostra en la figura 1.9 de la pàgina 7. Es pregunta quina hauria de ser l'altura màxima de la presa si es vol tenir un coeficient de seguretat de 3. La força de pressió de l'aigua és equivalent a una força distribuïda de perfil triangular, que actua horitzontalment sobre la paret vertical de la presa. La resultant d'aquestes forces horitzontals val $5H^2$, on H és l'altura de la presa en metres, i la força es dona en tones. El pes de la presa val $125H$, expressat també en tones.

Les forces que actuen sobre la presa de gravetat són:

1. La càrrega distribuïda triangular de valor $5H^2$, que actua en el centre de pressions.
2. El pes de la presa de gravetat, de valor $125H$, que actua en el centre de gravetat d'aquesta.

Prenent l'origen dels eixos coordenats en el vèrtex inferior esquerre de la secció de la presa (il·lustració (a) de la figura 1.42), els dos elements de l'especejament tindrien les característiques següents:

1. Un triangle rectangle de base 6 m i altura H m.
2. Un rectangle de base 2 m i de la mateixa altura.

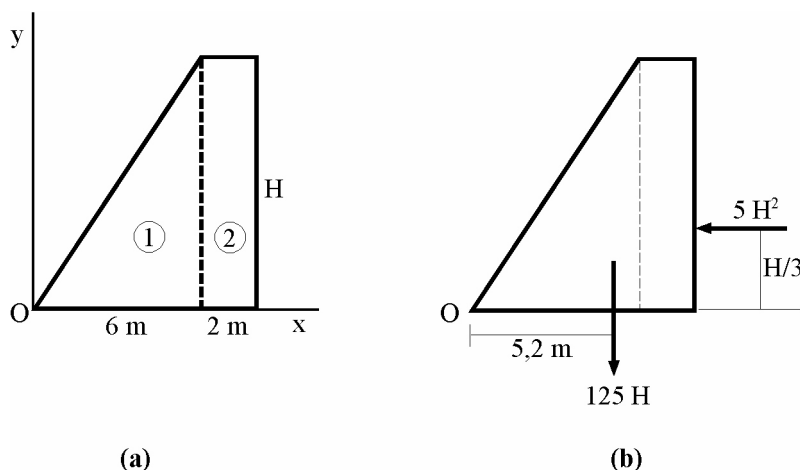


Figura 1.42: Il·lustracions de l'especejament i forces que actuen de l'exercici 1.9

La coordenada x del centre de gravetat on s'aplicaria la força pes de la presa de gravetat seria:

$$x_G = \frac{3H \cdot 4 + 2H \cdot 7}{3H + 2H} = 5,2 \text{ m}$$

D'acord a aquest resultat, les forces que actuen i els seus punts d'aplicació es mostren en la figura 1.42, on s'ha tingut en compte que el centre de pressions de la càrrega distribuïda triangular es troba a $H/3$ de la base.

Prenent els moments respecte del punt O, i aplicant la condició que ha de complir el coeficient de seguretat, s'obté l'equació següent:

$$M_{antigir} = 3 \cdot M_{gir} \rightarrow 125H \cdot 5,2 = 3 \cdot 5H^2 \cdot \frac{H}{3}$$

i l'altura màxima tindria el valor:

$$H = \sqrt{25 \cdot 5,2} \approx 11,4 \text{ m}$$

Exercici 1.10 El pes de la grua és $P_G = 50 \text{ kN}$, i està aplicat en el seu cdg G (figura 1.10 de la pàgina 8). Les distàncies b i L tenen els valors: $b = 0,75 \text{ m}$; $L = 4 \text{ m}$. La base de suport és quadrada i el seu costat val $a = 2 \text{ m}$. Si el pes específic del material de la base val 20 kN/m^3 , calculeu l'altura mínima de la base perquè el conjunt no bolque, si la càrrega màxima P que suportarà la grua és de 25 kN i volem tenir un coeficient de seguretat igual a 2.

Les forces que actuen sobre la grua són les següents:

1. El pes de la grua, P_G , de 50 kN que actua en el centre de gravetat G, el qual s'indica en la figura 1.43.
2. El pes de la base, P_{Base} , aplicat en el centre de gravetat d'aquesta.
3. La càrrega de 25 kN , aplicada en l'extrem dret de la grua.

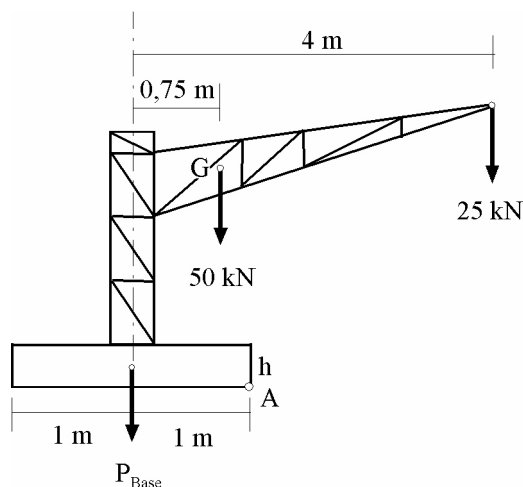


Figura 1.43: Diagrama de sòlid lliure de la grua amb els pesos i càrrega aplicada de l'exercici 1.10

L'exercici es pot resoldre en termes de les forces que afavoreixen la bolcada o gir de la grua (forces de gir) i les que s'hi oposen (forces antigir). Entre les primeres hi ha la càrrega de 25 kN i entre les segones la força pes de la base quadrada i la força pes de la grua, aplicada en el seu centre de gravetat. La condició límit que s'ha de verificar és:

$$M_{\text{antigir}} = 2 \cdot M_{\text{gir}}$$

on M_{gir} i M_{antigir} són els moments resultants de les forces que tendeixen a fer bolcar la grua i que tendeixen a impedir-ho, respectivament. Aquests moments s'han pres respecte de l'eix de rotació de la base quadrada, lloc on actua la reacció rugosa del sòl sobre aquesta (punt A de la figura 1.43).

El pes de la base es pot obtenir com a producte del pes específic pel volum de la base $V = a^2 \cdot h \text{ m}^3$. De manera que, aplicant la condició que s'havia escrit abans, tindriem:

$$P_{\text{Base}} \cdot \frac{a}{2} + 50 \left(\frac{a}{2} - 0,75 \right) = 2 \cdot 25 \cdot 3$$

$$P_{\text{Base}} = 20 \cdot h = 150 - 12,5 = 137,5 \text{ kN} \rightarrow h \approx 1,72 \text{ m}.$$

Exercici 1.11 Una barra de 3 m de longitud i 40 kp de pes està unida a la paret a través d'una articulació en A i un cable T. Sobre l'extrem penja un pes de 30 kp (vegeu la figura 1.11 de la pàgina 9). Es demana determinar, analíticament i gràficament, la reacció en A i la tensió en el cable.

Sobre la barra actuen quatre forces aplicades en els punts que s'indiquen en la figura 1.44:

- El pes de la barra de 40 kp, que actua en el centre de gravetat G d'aquesta.
- El pes de 30 kp en l'extrem esquerre, aplicat en el punt C.
- La tensió T , aplicada en el punt B.
- La reacció R_A , de dos components, ja que correspon a una articulació fixa.

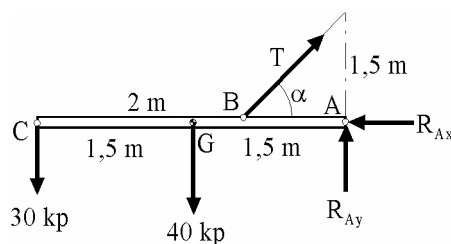


Figura 1.44: Diagrama de sòlid lliure de la barra amb els pesos, la tensió i la reacció corresponents a l'exercici 1.11

El diagrama de sòlid lliure de la barra es mostra en la figura 1.44. Les equacions d'equilibri serien les següents:

$$\sum_{i=1}^2 F_{i_x} = 0 = -R_{Ax} + T \cdot \cos 56,3^\circ = -R_{Ax} + 0,5548 \cdot T$$

$$\sum_{i=1}^4 F_{i_y} = 0 = R_{A_y} + T \cdot \sin 56,3^\circ - 30 - 40 = R_{A_y} + 0,832 \cdot T - 70$$

on α s'ha calculat com $\arctan(1,5/1) \approx 56,3^\circ$. Prenent moments respecte del punt B, sent positiu els que tenen el moviment de les agulles del rellotge, s'obté:

$$\sum_{i=1}^3 M_{i_B} = 0 = -R_{A_y} \cdot 1 - 30 \cdot 2 - 40 \cdot 0,5$$

on els moments de la tensió, per estar aplicada en B, i de R_{A_x} , per passar la seua línia d'acció per B, són nuls i no les hem incloses en l'expressió d'equilibri de moments. Resolent el sistema d'equacions anterior, s'obté:

$$R_{A_y} = -80 \text{ kp}; \quad R_{A_x} = 100 \text{ kp}; \quad T \approx 180,3 \text{ kp}.$$

Per a la resolució gràfica, reduïrem el sistema original de quatre forces a un altre equivalent de tres. Per a això obtindrem la resultant parcial de les forces pes de 30 kp i 40 kp. La figura 1.45 il·lustra el polígon de forces i el polígon funicular d'aquesta reducció de forces.

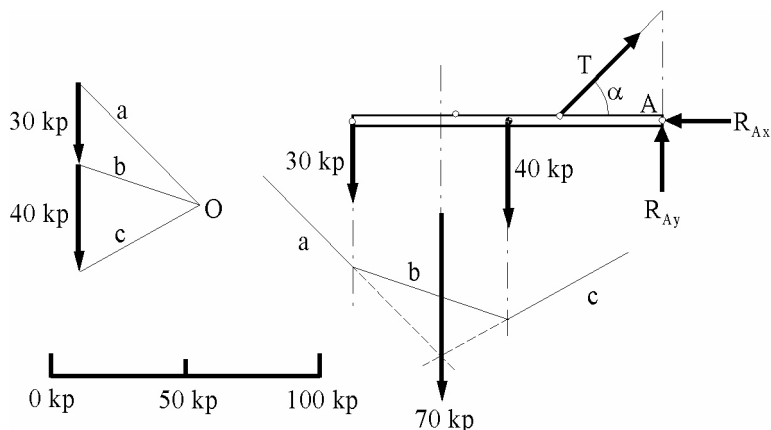


Figura 1.45: Resolució gràfica per a l'obtenció de la resultant parcial de l'exercici 1.11

Ara tenim un sistema de tres forces que, en l'equilibri, ha de ser concurrent. En la figura 1.46 es pot veure on es troba el punt de concurrència PC i quines són les direccions de la reacció i la tensió desconegudes. A partir d'aquestes direccions es pot dibuixar el polígon de forces que ha de ser tancat i on es coneix el valor d'una força (la resultant parcial de 70 kp). En l'escala utilitzada per a dibuixar el polígon es pot veure que la reacció i la tensió valen $R_A \approx 130 \text{ kp}$ i $T \approx 180 \text{ kp}$.

Exercici 1.12 El pes P, penjat d'una ploma de longitud L i pes negligible, l'aixeca una força F que exerceix un cable que passa per una corriola. La ploma recolza sobre una ròtula A (vegeu la figura 1.12 de la pàgina 10). Es demana:

1. Demostreu que la reacció en A té sempre la direcció de la ploma, siga quin siga el valor de l'angle α .
2. El valor límit d'aquesta reacció si l'angle α és de 90° .

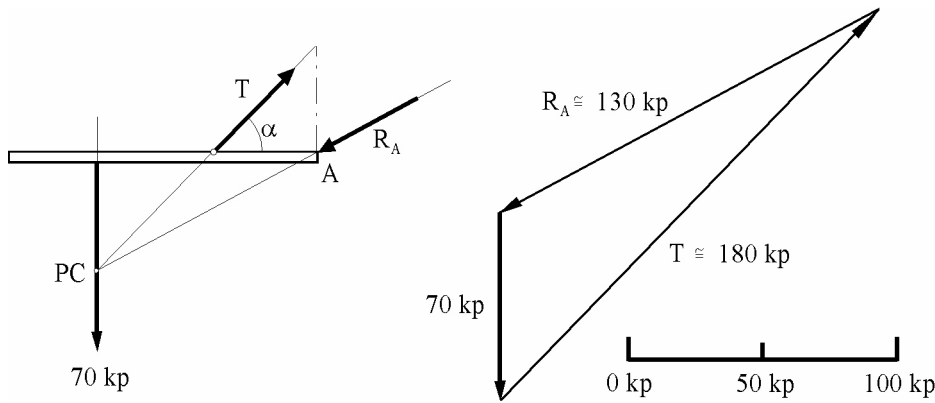


Figura 1.46: Resolució gràfica per a l'obtenció de la reacció en A i de la tensió T de l'exercici 1.11

Les forces que actuen sobre la ploma són les següents:

1. La força F, que actua en l'extrem superior de la ploma.
2. El pes P, també aplicat en l'extrem esquerre de la ploma.
3. La reacció de la ròtula R_A , de dos components.

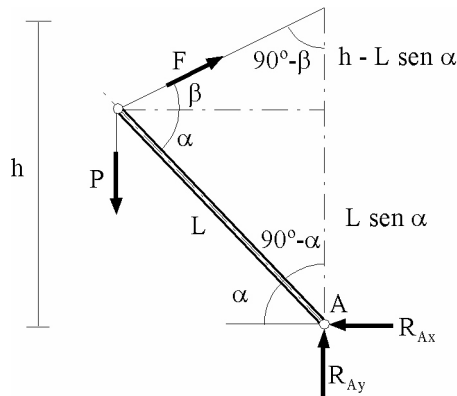


Figura 1.47: Diagrama de sòlid lliure de la ploma amb el pes, la força i la reacció corresponents a l'exercici 1.12

El diagrama de sòlid lliure de la ploma es mostra en la figura 1.47, i a partir d'aquí es poden escriure les condicions d'equilibri:

$$\sum_{i=1}^2 F_{ix} = 0 = -R_{Ax} + F \cdot \cos \beta$$

$$\sum_{i=1}^3 F_{iy} = 0 = R_{Ay} + F \cdot \sin \beta - P$$

i prenent moments respecte del punt de concurrència de les forces F i P, sent positiu el sentit de moviment de les agulles del rellotge, s'obtidria:

$$\sum_{i=1}^2 M_{iB} = 0 = R_{Ay} \cdot L \cdot \cos \alpha - R_{Ax} \cdot L \cdot \sin \alpha$$

$$R_{A_y} = \tan \alpha \cdot R_{A_x}$$

Aquesta última relació implica que la reacció tindrà sempre la mateixa direcció que la de la ploma, perquè:

$$\tan \frac{R_{A_y}}{R_{A_x}} \equiv \tan \alpha$$

Pel que fa al cas particular en què α és 90° , totes les forces que actuen sobre la ploma serien verticals. El valor límit s'obtindria quan la força F del cable fóra nul·la i, per tant, la reacció en A tindria un valor igual i de sentit contrari al pes P .

Exercici 1.13 Un disc circular de radi R està dividit en dues peces idèntiques de pes 10 kp cadascuna, tal com indica la figura 1.13 de la pàgina 10. Les dues peces es mantenen unides diametralment mitjançant una cinta sense pes, en els extrems de la qual pengen pesos P . A és el punt de recolzament sobre la superfície horitzontal. Es demana quin és el valor mínim de P perquè el sistema es mantinga en equilibri.

Atesa la simetria del sistema, es pot aïllar la meitat d'aquest, tal com mostra la figura 1.48.

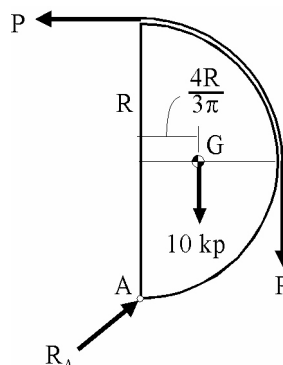


Figura 1.48: Diagrama de sòlid lliure del disc amb els pesos P , el pes d'una peça i la reacció en A corresponents a l'exercici 1.13

El pes de la part dreta del disc es troba aplicat en G a una distància $4R/(3\pi) \approx 0,42R$. Si calculem el moment de les forces respecte del punt A, s'obté una equació l'única incògnita de la qual és precisament el pes P . Prenent com a negatius els moments en el sentit de les agulles del rellotge, s'arriba a:

$$\sum_{i=1}^3 M_{i_A} = 0 = P \cdot 2R - P \cdot R - 10 \cdot \frac{4R}{3\pi}$$

Per tant, el pes mínim perquè el sistema es mantinga en equilibri és $P = 40/(3\pi) \approx 4,24 \text{ kp}$.

Exercici 1.14 Una antena parabòlica, de 3000 kp de pes, es troba situada en l'extrem d'una biga de 3000 kp de pes, articulada en l'altre extrem i subjectada per un cable que forma un angle

de 30° amb l'horitzontal. El centre de gravetat de l'antena es troba a 1,5 m de l'extrem lliure de la biga, tal com mostra la figura 1.14 de la pàgina 11. Calculeu el valor de la tensió en el cable i el de la reacció en l'articulació.

Tal com es pot veure en la figura 1.49, el pes de l'antena parabòlica s'ha substituït pel seu sistema equivalent sobre l'extrem lliure de la biga i s'han dibuixat la tensió, el pes de la biga i la reacció en l'articulació A.

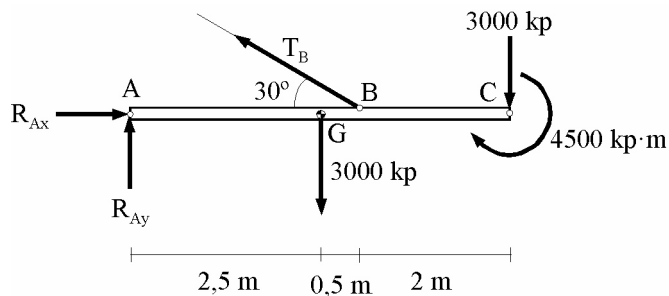


Figura 1.49: Diagrama de sòlid lliure de la biga amb l'antena parabòlica de l'exercici 1.14

Les condicions d'equilibri serien les següents:

$$\sum_{i=1}^2 F_{ix} = 0 = R_{Ax} - T \cdot \cos 30^\circ$$

$$\sum_{i=1}^4 F_{iy} = 0 = R_{Ay} + T \cdot \sin 30^\circ - 3000 - 3000$$

i prenent moments respecte del punt A, sent positiu el sentit de moviment de les agulles del rellotge, s'obtidria:

$$\sum_{i=1}^4 M_{iA} = 0 = 3000 \cdot 2,5 - T \cdot \sin 30^\circ \cdot 3 + 3000 \cdot 5 + 4500$$

Resolent aquest sistema d'equacions s'obtidrien les solucions següents:

$$T = 18\,000 \text{ kp}, \quad R_{Ax} = 15\,588 \text{ kp}, \quad R_{Ay} = -3\,000 \text{ kp}.$$

Exercici 1.15 Una barra d'1 m de longitud i 450 N de pes, recolzada sobre una superfície rugosa, se sosté mitjançant un cable BC tal com mostra la figura 1.15 de la pàgina 11. Quin serà el valor de l'angle límit α perquè no es produïska lliscament si el coeficient de fricció estàtic entre la barra i la superfície val 0,4? Quant val la tensió en el cable?

Sobre la barra actuen les forces següents:

- El pes de la barra P , aplicat en el centre de gravetat.
- Reacció del sòl R_A , que tindrà dos components, ja que hi ha fricció entre la barra i la superfície horitzontal.

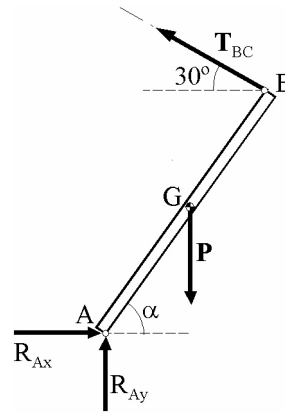


Figura 1.50: Diagrama de sòlid lliure de la barra de l'exercici 1.15

- La tensió del cable BC T_{BC} .

El diagrama de sòlid lliure de la barra serà llavors el que es mostra en la figura 1.50. Les condicions d'equilibri serien:

$$\sum_{i=1}^2 F_{i_x} = 0 = R_{Ax} - T_{BC} \cdot \cos 30^\circ$$

$$\sum_{i=1}^3 F_{i_y} = 0 = R_{Ay} + T_{BC} \cdot \sin 30^\circ - 450$$

i prenent moments respecte del punt B, sent positiu el sentit de moviment de les agulles del rellotge, s'obtidria:

$$\sum_{i=1}^3 M_{i_B} = 0 = -R_{Ax} \cdot 1 \cdot \sin \alpha + R_{Ay} \cdot 1 \cdot \cos \alpha - 450 \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos \alpha$$

Com que la força de fregament és el producte del coeficient de fricció per la força normal, resulta que $R_{Ax} = \mu R_{Ay} = 0,4 \cdot R_{Ay}$. El sistema d'equacions quedaria:

$$0,4 \cdot R_{Ay} - T_{BC} \cdot \cos 30^\circ = 0$$

$$R_{Ay} + T_{BC} \cdot \sin 30^\circ = 450$$

$$-0,4 \cdot R_{Ay} \cdot \tan \alpha + R_{Ay} = 225 \longrightarrow \tan \alpha = \frac{R_{Ay} - 225}{0,4 \cdot R_{Ay}}$$

Resolent el sistema d'equacions, s'obtidrien les solucions següents:

$$T_{BC} = 168,9 \text{ N}; R_{Ay} = 366 \text{ N} \text{ i } \alpha = 43,9^\circ.$$

Exercici 1.16 Una barra no uniforme de pes P està suspesa en posició horitzontal per mitjà de dues cordes de pes negligible, tal com mostra la figura 1.16 de la pàgina 12. L'angle que forma una de les cordes amb la vertical és $\alpha = 36,9^\circ$ i l'altra corda forma un angle $\beta = 53,1^\circ$ amb la vertical. Si la longitud L de la barra és de 6,1 m, calculeu la distància x des de l'extrem esquerre al centre de gravetat.

Sobre la barra actuen les forces següents:

- El pes de la barra P , aplicat en el centre de gravetat.
- La tensió T_A , aplicada en l'extrem esquerre de la barra.
- La tensió T_B , aplicada en l'extrem dret de la barra.

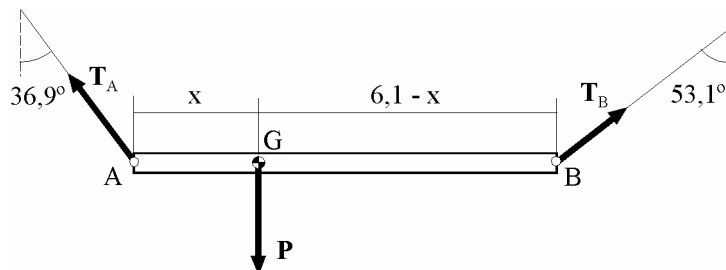


Figura 1.51: Diagrama de sòlid lliure de la barra amb els cables i el pes d'aquesta de l'exercici 1.16

El diagrama de sòlid lliure de la barra serà llavors el que es mostra en la figura 1.51. Plantegem les equacions d'equilibri:

$$\sum_{i=1}^2 F_{ix} = 0 = -T_A \cdot \sin \alpha + T_B \cdot \sin \beta$$

$$\sum_{i=1}^3 F_{iy} = 0 = T_A \cdot \cos \alpha + T_B \cdot \cos \beta - P$$

i prenent moments respecte del punt A, sent negatiu el sentit de moviment de les agulles del rellotge, s'obtidria:

$$\sum_{i=1}^3 M_{iA} = 0 = T_B \cdot \cos \beta \cdot L - P \cdot x$$

Atès que els angles α i β són complementaris, és a dir, la seua suma és de 90° , les equacions anteriors s'expressarien:

$$-T_A \cdot \sin \alpha + T_B \cdot \cos \alpha = 0 \longrightarrow T_B = T_A \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$T_A \cdot \cos \alpha + T_B \cdot \sin \alpha - P = 0 \longrightarrow T_A \cdot \cos \alpha + T_A \cdot \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha} = P$$

$$T_B \cdot \cos \beta \cdot L - P \cdot x = 0 \longrightarrow x = \frac{T_B \cdot \cos \beta \cdot L}{P}$$

Resolent el sistema d'equacions anterior, s'obtidrien les solucions següents: $T_A = 0,8 \cdot P$; $T_B = 0,6 \cdot P$ i $x = 2,20$ m.

Exercici 1.17 Una placa prefabricada de $2 \text{ m} \times 3 \text{ m}$ i massa 10 t s'eleva a velocitat constant mitjançant tres cables que estan units en el punt D, situat sobre la vertical del centre de la placa (vegeu la figura 1.17 de la pàgina 13). Determineu la tensió en cada cable.

D'acord a la segona llei de Newton, $\mathbf{F} = m \cdot \mathbf{a}$, la força neta que actua sobre un cos que es troba en repòs o en moviment uniforme és nul·la. Com que la placa està elevant-se a velocitat constant, la força neta en el punt D haurà de ser zero. A més a més, com que el sistema de forces és concurrent en D, l'única condició que s'ha de verificar per a l'equilibri és que el sumatori de totes les forces siga nul, ja que el moment resultant en el punt de concurrència és idènticament nul.

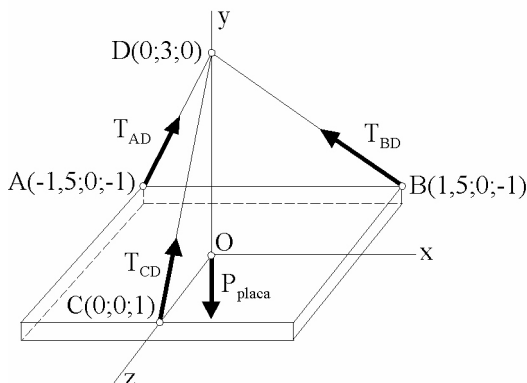


Figura 1.52: Diagrama de sòlid lliure de la placa amb els cables i el pes d'aquesta de l'exercici 1.17

La figura 1.52 mostra el diagrama de sòlid lliure corresponent a la placa prefabricada d'aquest exercici. L'expressió vectorial que dona l'equilibri d'aquest sistema és:

$$\mathbf{T}_{AD} + \mathbf{T}_{BD} + \mathbf{T}_{CD} + \mathbf{P}_{placa} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{T}_{AD} \cdot \mathbf{u}_{AD} + \mathbf{T}_{BD} \cdot \mathbf{u}_{BD} + \mathbf{T}_{CD} \cdot \mathbf{u}_{CD} + \mathbf{P}_{placa} = \mathbf{0}$$

on s'ha posat el vector tensió corresponent a cada cable com el mòdul d'aquesta pel seu vector unitari en la direcció de cada cable. En la figura 1.52 s'indiquen les coordenades dels punts d'aplicació de les tensions i el pes, així com les seues línies d'acció. Per a obtenir l'equació vectorial a resoldre, el primer pas consisteix a determinar els vectors unitaris:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{AD} &= \frac{\mathbf{AD}}{|\mathbf{AD}|} = \frac{\mathbf{OD} - \mathbf{OA}}{|\mathbf{AD}|} = \\ &= \frac{(0; 3; 0) - (-1; 5; 0; -1)}{|\mathbf{AD}|} = \frac{(1; 5; 3; 1)}{3,5} = (0,429; 0,857; 0,286) \\ \mathbf{u}_{BD} &= \frac{\mathbf{BD}}{|\mathbf{BD}|} = \frac{\mathbf{OD} - \mathbf{OB}}{|\mathbf{BD}|} = \\ &= \frac{(0; 3; 0) - (1; 5; 0; -1)}{|\mathbf{BD}|} = \frac{(1; 5; 3; 1)}{3,5} = (-0,429; 0,857; 0,286) \\ \mathbf{u}_{CD} &= \frac{\mathbf{CD}}{|\mathbf{CD}|} = \frac{\mathbf{OD} - \mathbf{OC}}{|\mathbf{CD}|} = \\ &= \frac{(0; 3; 0) - (0; 0; 1)}{|\mathbf{CD}|} = \frac{(0; 3; -1)}{3,16} = (0; 0,949; -0,316) \\ \mathbf{P}_{placa} &= (0, -10, 0) \end{aligned}$$

Per tant, l'equació vectorial que s'obté és:

$$T_{AD} \cdot (0, 429; 0, 857; 0, 286) + T_{BD} \cdot (-0, 429; 0, 857; 0, 286) + \\ + T_{CD} \cdot (0; 0, 949; -0, 316) = (0, -10, 0)$$

Igualant component a component s'arriba al sistema d'equacions lineal següent:

$$\left. \begin{aligned} 0,429 \cdot T_{AD} - 0,429 \cdot T_{BD} &= 0 \implies T_{AD} = T_{BD} \\ 0,857 \cdot T_{AD} + 0,857 \cdot T_{BD} + 0,949 \cdot T_{CD} &= 10 \\ 0,286 \cdot T_{AD} + 0,286 \cdot T_{BD} - 0,316 \cdot T_{CD} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Substituint el resultat de la primera equació en la segona i la tercera, ens queda un sistema de dos equacions amb dues tensions desconegudes, la resolució del qual ens dona els valors següents:

$$T_{AD} = T_{BD} \approx 2,92 \text{ t}; \quad T_{CD} \approx 5,27 \text{ t}.$$

Exercici 1.18 En la figura 1.18 de la pàgina 13 es mostra la secció d'un carrer en què s'ha estès un cable entre paret i paret l'objectiu del qual és servir de suport per a un motiu d'il·luminació, dels que s'utilitzen en festes, el pes del qual és de 40 kp i que se suposarà aplicat en el centre del cable. S'observa que la fletxa s del cable val 80 cm. L'extrem dret del cable està subjectat al mur d'una balcona. Aquest té una longitud de 2 m, està construïda de maçoneria de rajola (densitat 1700 kg/m^3), i la seua secció es mostra ampliada en el dibuix de la dreta. L'estabilitat del mur està garantida pel seu propi pes i per l'ancoratge del morter de formigó de la seua base, capaç de produir un moment d'antigir màxim de $20 \text{ kp}\cdot\text{m}$. Es demana:

1. La tensió a què es troba sotmès el cable.
2. Justifiqueu raonadament si bolcarà el mur.
3. Què succeiria si els instal·ladors hagueren col·locat el cable de manera que la fletxa haguera sigut només de 60 cm?

Com que el sistema de forces és concurrent, l'única condició que cal aplicar per a l'equilibri és que el sumatori de les forces siga nul. Atesa la figura 1.54 que mostra el diagrama de sòlid lliure de les forces, **el valor de la tensió del cable** s'obté a partir de la condició d'equilibri de les forces verticals.

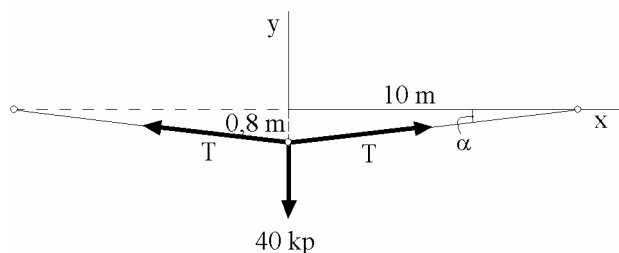


Figura 1.53: Diagrama de sòlid lliure per al primer apartat de l'exercici 1.18

$$\alpha = \arctan \frac{80}{1000} = \arctan 0,08 \approx 4,6^\circ$$

$$\sum F_{iy} = 0 \longrightarrow 2 \cdot T \cdot \sin \alpha - 40 = 0 \longrightarrow T \approx 251 \text{ kp}$$

Per a resoldre el segon apartat d'aquest exercici caldrà calcular els moments de gir i antigir de les forces que actuen sobre el mur de la balcona. De la relació entre ells, es deduirà si hi haurà bolcament o no. El pes del mur de la balcona és:

$$P = 0,3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1700 = 1020 \text{ kp}.$$

I els moments de gir i antigir són:

$$M_{gir} = 251 \cdot \cos 4,6^\circ \cdot 0,7 = 175 \text{ kp} \cdot m$$

$$M_{antigir} = 1020 \cdot 0,15 = 153 \text{ kp} \cdot m$$

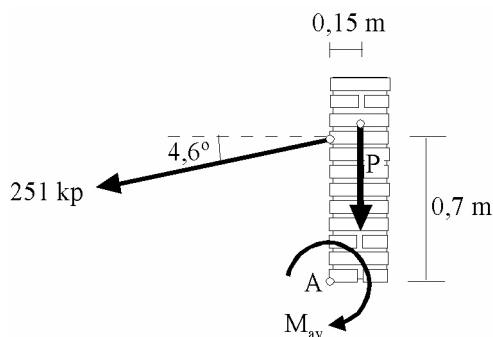


Figura 1.54: Diagrama de sòlid lliure per al segon apartat de l'exercici 1.18

Com que el morter aporta un moment antigir de 20 kp·m, el moment antigir total serà de 173 kp·m. Tenint en compte que el moment de gir es 175 kp·m, la conseqüència és que el mur bolcarà.

Si es disminueix la fletxa a 60 cm, l'angle α que forma la tensió ara seria de $\arctan 0,06 \approx 3,4^\circ$. La tensió del cable en aquesta situació és de $T = 20 / \sin 3,4^\circ \approx 334$ kp. Per tant, el moment de gir corresponent és:

$$M_{gir} = 334 \cdot \cos 3,4^\circ \cdot 0,7 = 233 \text{ kp} \cdot m$$

Això implica que amb major raó bolcarà el mur i que, en tot cas, caldria augmentar la fletxa i no disminuir-la.

Exercici 1.19 El cilindre uniforme de radi a mostrat en la figura 1.19 de la pàgina 14 pesava en un principi 800 N. Després de trepar un forat cilíndric, el seu pes canvia a 650 N. Els eixos dels dos cilindres són paral·lels. Suposant que el cilindre no llisca sobre la superfície horitzontal, es demana:

1. El radi del trepant.
2. La posició del centre de gravetat del cos resultant.
3. La tensió en el cable que impedeix el moviment.

Per a resoldre el primer apartat, s'aplicarà que la raó entre les seccions del cilindre massís inicial i el forat cilíndric ha de ser igual a la raó entre els seus pesos. És a dir:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{P_1}{P_2} \Rightarrow \frac{\pi \cdot a^2}{\pi \cdot r^2} = \frac{800}{800 - 650} \Rightarrow \frac{r}{a} = \sqrt{\frac{150}{800}}$$

$$\frac{r}{a} = \sqrt{\frac{3}{16}} \Rightarrow r = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot a \approx 0,443 \cdot a$$

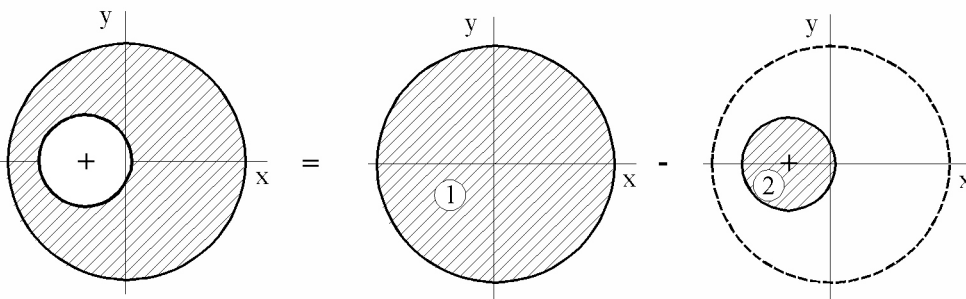


Figura 1.55: Espedaçament de la secció plana de l'exercici 1.19

Atesa la figura 1.19 de la pàgina 14, l'eix $y = 0$ és un eix de simetria de la secció. Per tant, l'ordenada del centre de gravetat és $y_G = 0$. Mentre que per a calcular l'abscissa x_G , la figura 1.55 mostra l'espedaçament de la secció plana d'aquest exercici.

$$x_G = \frac{x_{1G} \cdot P_1 - x_{2G} \cdot P_2}{S_1 - S_2} = \frac{0 \cdot 800 - 150 \cdot (-a/3)}{800 - 150} = \frac{50 \cdot a}{650} = \frac{a}{13}$$

Sobre el cilindre actuen tres forces (la figura 1.56 representa el diagrama de sòlid lliure): la reacció R_B , el pes del cilindre P aplicat en el seu centre de gravetat, i la tensió T del cable en A.

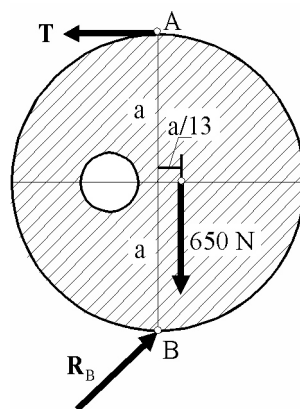


Figura 1.56: Diagrama de sòlid lliure del cilindre corresponent a l'exercici 1.19

Prenent moments respecte del punt B, sent negatius els que tenen el moviment de les agulles del rellotge, s'obtidria:

$$\sum_{i=1}^2 M_{iB} = 0 = T \cdot 2a - P \cdot \frac{a}{13} \implies T = \frac{P}{26} = \frac{650}{26} = 25 \text{ N}$$

Exercici 1.20 Una barra AB, homogènia, que té una longitud $2L = 1,8 \text{ m}$ i pes $W = 0,3 \text{ N}$ està recolzada per l'extrem A en l'interior d'una semiesfera buida, de densitat variable, de radi $r = \sqrt{2}/2 \text{ m}$, pes P i centre de gravetat $OG = 0,75 r$. La barra recolza en el punt C en la vora de la semiesfera (figura 1.20 de la pàgina 15). Aquesta semiesfera es troba sobre un pla rugós horitzontal, estant la barra continguda en el pla vertical que passa pel centre de gravetat G de la semiesfera i pel centre de l'esfera O. El conjunt es troba en equilibri quan els angles que forme amb la vertical el radi OA i el radi OC són respectivament $\gamma = 30^\circ$ i $\beta = 60^\circ$.

1. En la barra AB calcula l'angle α que forma amb l'horitzontal i indica si el seu centre de gravetat es troba dins o fora de la semiesfera.
2. Calcula el pes P de la semiesfera així com la reacció en H perquè es produísca l'equilibri.

Per propietats geomètriques deduïm que els segments \overline{OA} i \overline{OC} coincideixen amb el radi de l'esfera $r\sqrt{2}/2 \text{ m}$. El triangle que formen els vèrtex O, A i C és recte i el segment \overline{AC} és, precisament, la seua hipotenusa. Per tant, utilitzant el teorema de Pitàgores o relacions de trigonometria s'obté que $\overline{AC} = \sqrt{2}r = 1 \text{ m}$. Si la barra és homogènia, el seu **centre de gravetat M** estarà a $0,9 \text{ m}$ de l'extrem A, és a dir, **dins de la semiesfera**. La figura 1.57 mostra el diagrama de sòlid lliure que correspon al sistema.

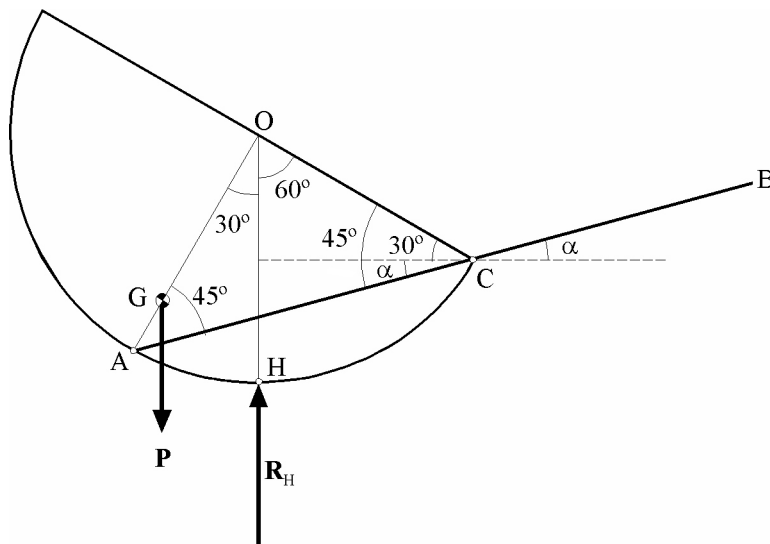


Figura 1.57: Diagrama de sòlid lliure de la semiesfera i la barra de l'exercici 1.20

Traçant l'horitzontal pel punt C, s'obté un triangle rectangle que ens permet deduir el valor de l'angle α si s'aplica que la suma dels angles interns d'un

triangle val 180° . Com es pot veure en la figura 1.57, la barra forma un **un angle amb l'horitzontal** de $\alpha = 15^\circ$.

Considerant el sistema barra-semiesfera, actuen la reacció normal en H, R_H , el pes de la barra $W = 0,3 \text{ N}$ aplicat en el seu centre de gravetat M i el pes de la semiesfera P aplicat en el seu centre de gravetat G. Aplicant la condició de l'equilibri, torçor nul, i prenent moments respecte del punt H s'obté el sistema d'equacions següent:

$$\sum_{i=1}^3 F_{i_y} = 0 = R_H - P - 0,3 \implies R_H = P + 0,3$$

$$\sum_{i=1}^2 M_{i_H} = 0 = P \cdot \overline{OG} \cdot \sin 30^\circ - 0,3 \cdot d$$

on la distància d es pot calcular tenint en compte el triangle format pel segment \overline{AM} sobre la barra, l'horitzontal per A i la vertical per M. Per això,

$$d = 0,9 \cdot \cos 15^\circ - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sin 30^\circ \approx 0,52 \text{ m}$$

Resolent el sistema d'equacions que s'ha obtingut, les solucions serien les següents:

$$P = 0,584 \text{ N} \text{ i } R_H = 0,884 \text{ N}$$

1.7 Resolució dels exercicis tipus examen

Exercici 1.21 En la figura 1.21 de la pàgina 16 es mostra la modelització d'una grua. Aquesta es pot considerar formada per una barra vertical AC encastada en el sòl, de pes $2\,000 \text{ kp}$ i longitud total 13 m , i per una barra inclinada (ploma de la grua), de pes $3\,000 \text{ kp}$ i subjectada a la barra AC per una articulació en B i un cable CE. En l'extrem F d'aquesta barra hi ha una càrrega de $4\,000 \text{ kp}$. Es demana que calculeu:

1. La tensió en el cable CE i la reacció en l'articulació B. Resoleu-lo analíticament i gràficament.
2. Els elements de la reacció del sòl sobre la barra vertical en el punt A.

Les forces que actuen sobre la barra DF de la grua seran:

- La reacció R_B , de dos components, ja que correspon a una articulació fixa.
- El pes de la barra DF de $3\,000 \text{ kp}$, que actua en el centre de gravetat G d'aquesta.
- La tensió T_E en el cable, aplicada en el punt E.
- El pes de $4\,000 \text{ kp}$ en l'extrem dret, aplicat en el punt F.

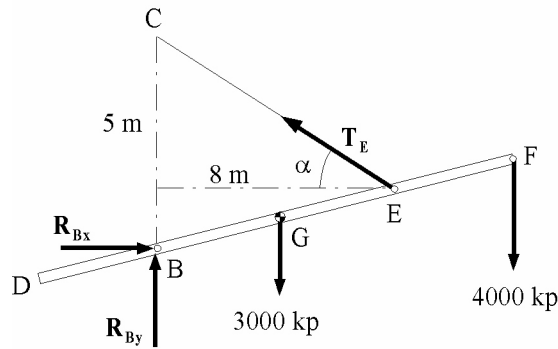


Figura 1.58: Diagrama de sòlid lliure de la ploma DF corresponent a l'exercici 1.21

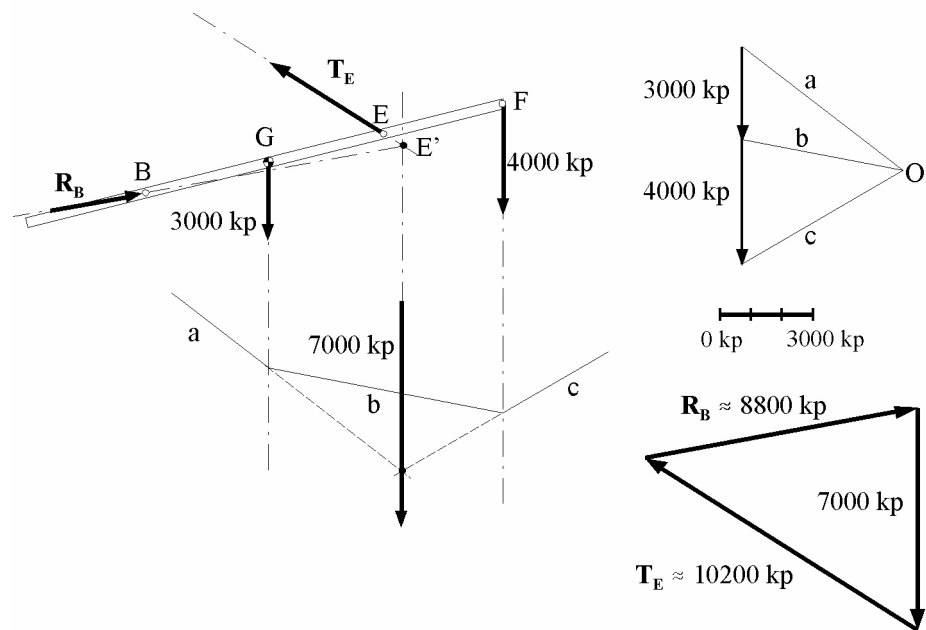


Figura 1.59: Resolució gràfica per a l'apartat 1 de l'exercici 1.21

El diagrama de sòlid lliure de la barra es mostra en la figura 1.58. D'aquesta es pot deduir el valor de l'angle $\alpha = \arctan(5/8) = 32,0^\circ$. Les equacions d'equilibri serien les següents:

$$\sum_{i=1}^2 F_{ix} = 0 = R_{Bx} + T_E \cdot \cos 32,0^\circ$$

$$\sum_{i=1}^4 F_{iy} = 0 = R_{By} + T_E \cdot \sin 32,0^\circ - 3000 - 4000$$

i prenent moments respecte del punt B, sent positiu els que tenen el moviment de les agulles del rellotge, s'obtidria:

$$\sum_{i=1}^3 M_{iB} = 0 = 3000 \cdot 4 - T_E \cdot 7 \cdot \cos 32,0^\circ + 4000 \cdot 12$$

Resolent el sistema d'equacions anterior, s'obtidrien les solucions següents:

$$R_{B_x} = 8571 \text{ kp}; \quad R_{B_y} = 1643 \text{ kp}; \quad T_E = 10108 \text{ kp}.$$

Sobre la ploma DF actuen quatre forces R_B , 3000 kp, T_E i 4000 kp. Es redueix a un altre equivalent a tres calculant la resultant parcial de les forces de 3000 kp i 4000 kp mitjançant el polígon funicular (part superior dreta i inferior esquerra de la figura 1.59). Llavors, R_B , 7000 kp i T_E constitueixen un sistema coplanari de tres forces que, en l'equilibri, hauran de concórrer en un punt, E' . Una vegada que tenim definides les tres direccions, es dibuixa el polígon de forces d'aquestes forces. L'escala i els valors aproximats es troben indicades en la figura 1.59.

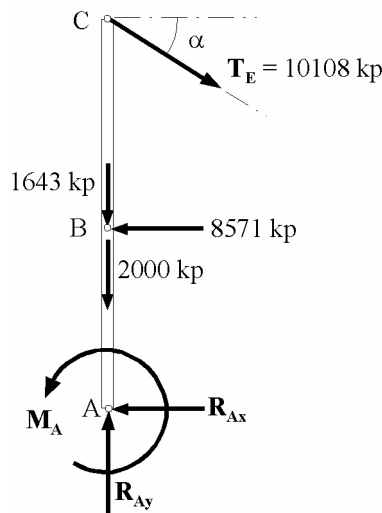


Figura 1.60: Diagrama de sòlid lliure de la de la barra vertical AC de l'exercici 1.21

Les forces que actuen sobre la barra vertical AC de la grua seran:

- La reacció R_B , de dos components, ja que correspon a una articulació fixa.
- El pes de la barra AC de 2000 kp, que actua en el centre de gravetat G d'aquesta.
- La tensió T_E en el cable, aplicada en el punt C.
- La reacció R_A , de dos components, ja que correspon a un encastament.
- El moment de reacció M_A en l'encastament.

El diagrama de sòlid lliure de la barra vertical AC es mostra en la figura 1.60. Les equacions d'equilibri serien les següents:

$$\sum_{i=1}^3 F_{i_x} = 0 = -R_{A_x} + 8571 - 8571 \implies R_{A_x} = 0$$

$$\sum_{i=1}^4 F_{i_y} = 0 = R_{A_y} - 2000 - 5357 - 1643 \implies R_{A_y} = 9000 \text{ kp}$$

i prenent moments respecte del punt A, sent negatiu els que tenen el moviment de les agulles del rellotge, s'obtidria:

$$\sum_{i=1}^3 M_{i_A} = 0 = M_A - 8571 \cdot 13 + 8571 \cdot 6 \implies R_{M_A} = 59997 \text{ kp} \cdot \text{m}$$

Exercici 1.22 En la figura 1.22 de la pàgina 17 es mostra una grua de 15 m d'altura, la base de la qual està encastada en l'origen de coordenades. El cable de la grua exerceix una força de tracció F_1 , i té en el seu extrem esquerre un cos P, de pes 1200 kp. El cos es manté en equilibri sobre la vertical de B a una altura de 5 m. Sobre el cos actuen, a més a més de les dues forces anteriors, les forces F_2 (paral·lela a l'eix OX i F_3 (paral·lela a l'eix OY). Es demana:

1. Valors de les forces F_1 , F_2 i F_3 .
2. Valor del torçor de reacció del sòl en el punt d'encastament de la grua.
3. Eix central del sistema de forces $\{F_1, F_2, F_3\}$.

Per a donar una resposta a la situació descrita en aquest exercici és recomanable indicar les components de totes les forces i un punt d'aplicació de la seua línia d'acció. Per a determinar la força F_1 convé obtenir el vector unitari en la direcció \mathbf{AP} . Les coordenades dels punts A i P i les forces que actuen es mostren en la figura 1.61.

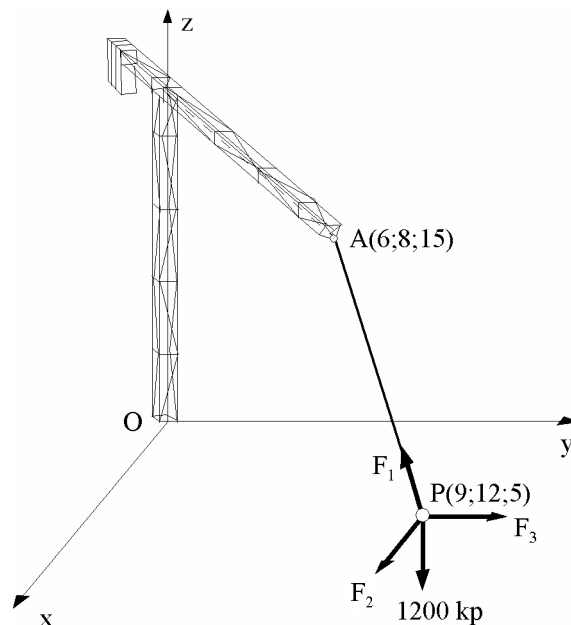


Figura 1.61: Representació gràfica de les forces de l'exercici 1.22 i coordenades dels punts A i P.

Les forces tenen les components següents:

$$\mathbf{F}_1 = F_1 \cdot \mathbf{u}_{PA} = F_1 \cdot \frac{\mathbf{PA}}{|\mathbf{PA}|} = \frac{\mathbf{OA} - \mathbf{OP}}{|\mathbf{PA}|} =$$

$$= F_1 \cdot \frac{(6, 8, 15) - (9, 12, 5)}{|PA|} = F_1 \cdot \frac{(-3, -4, 10)}{\sqrt{125}}$$

$$\mathbf{F}_2 = (F_2, 0, 0); \quad \mathbf{F}_3 = (0, F_3, 0); \quad \mathbf{P} = (0, 0, -1\,200)$$

Com que el cos es manté en equilibri en el punt B, s'haurà de verificar que:

$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \mathbf{P} = (0, 0, 0)$$

$$\frac{F_1}{\sqrt{125}} \cdot (-3, -4, 10) + (F_2, 0, 0) + (0, F_3, 0) + (0, 0, -1\,200) = (0, 0, 0)$$

D'aquesta relació vectorial s'obté el sistema d'equacions que s'ha de resoldre:

$$\left. \begin{aligned} -3 \cdot F_1 / \sqrt{125} + F_2 &= 0 \\ -4 \cdot F_1 / \sqrt{125} + F_3 &= 0 \\ 10 \cdot F_1 / \sqrt{125} - 1\,200 &= 0 \implies F_1 = 120 \cdot \sqrt{125} \text{ kp} \end{aligned} \right\}$$

Substituint el resultat obtingut de la tercera equació en les equacions primera i tercera, es calculen les altres dues forces: $F_2 = 360 \text{ kp}$ i $F_3 = 480 \text{ kp}$. Per tant, el sistema de forces quedaria expressat com:

$$\mathbf{F}_1 = (-360, -480, 1\,200) \text{ kp}, \quad \mathbf{F}_2 = (360, 0, 0) \text{ kp}, \quad \mathbf{F}_3 = (0, 480, 0) \text{ kp}.$$

Per a respondre al segon apartat assumirem que l'única força neta que actua sobre la grua és la tensió del cable aplicada en el punt A, és a dir, F_1 (lògicament, els pesos i contrapesos de la grua també afecten el torçor de reacció en O, però no són dades d'aquest exercici). Es calcularà el torçor en l'origen O, punt d'encastament de la grua. La resultant coincideix amb la força F_1 i el moment resultant serà:

$$\mathbf{M}_O = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 6 & 8 & 15 \\ -360 & -480 & 1\,200 \end{vmatrix} = (1, 68; -1, 26; 0) \times 10^4 \text{ kp} \cdot \text{m}$$

Per tant, el torçor demanat en el segon apartat és $(-\mathbf{F}_1; -\mathbf{M}_O)$.

Per a determinar l'eix central d'un sistema de forces, s'ha de calcular el torçor d'aquest. Ara bé, com que és un sistema concurrent en P, l'eix central és paral·lel a la resultant i la suma de les tres forces només té component en l'eix OZ, això implica que l'equació de l'eix central és una recta paral·lela a aquest eix passant pel punt P(9, 12, 5).

Exercici 1.23 Una antena parabòlica, el plat de la qual pesa 500 kp, es troba en l'extrem superior d'un pal vertical, tal com s'indica en la figura 1.23 de la pàgina 18. El centre gravetat del plat es troba a 2 m de l'eix del pal, tal com es pot veure en el dibuix en planta del conjunt. El pal, amb un pes propi de 2 500 kp, està fixat al sòl mitjançant tres cables (AB, CD i EF), on cadascú dels seus extrems està sobre una circumferència de radi 6 m, i l'altre a distintes altures sobre el pal. L'extrem inferior està encastat a nivell del sòl sobre una llosa de formigó. Els cables es tensen amb forces iguals de 2 000 kp. Suposant que el sistema es troba en equilibri, es demana:

1. Torçor en el punt O del sistema de forces format pel pes del plat de l'antena, pes del pal i tensions dels cables.
2. Torçor de reacció que apareix en la base del pal.
3. Supposeu ara que la base del pal no està encastada sinó simplement recolzada sobre la llosa. Se suposa que la reacció de la llosa serà vertical. Calculeu, si és possible, en quin lloc del pal i amb quina direcció hauria d'insertar-se un quart cable perquè el sistema continuara estant en equilibri.

Per a determinar el sistema de forces s'ha d'establir, en primer lloc, un sistema de referència que ens permeta obtenir les coordenades dels punts d'aplicació de les forces i l'expressió vectorial d'aquestes. La figura 1.62 indica la direcció dels eixos per a aquest exercici.

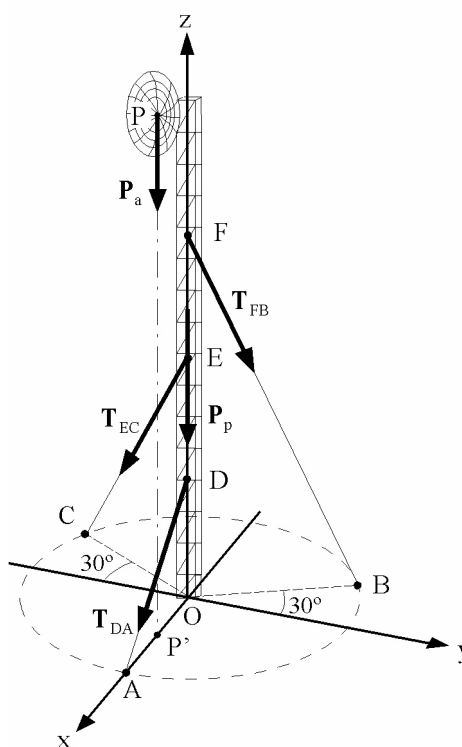


Figura 1.62: Diagrama de sòlid lliure de l'antena parabòlica de l'exercici 1.23.

Per a obtenir el **torçor** del sistema de forces, cal calcular la resultant i el moment resultant respecte del punt O. S'identifiquen les forces i un punt d'aplicació de la seua línia d'acció.

- Pes de l'antena $\mathbf{P}_a = (0, 0, -500)$ kp i passa pel punt $P(2, 0, 20)$ m o $P'(2, 0, 2)$ m.
- Pes del pal $\mathbf{P}_p = (0, 0, -2\,500)$ kp i passa pel punt $O(0, 0, 0)$ m.
- Les tensions \mathbf{T}_{DA} , \mathbf{T}_{FB} , \mathbf{T}_{EC} que es poden escriure com $\mathbf{T}_{DA} = 2\,000 \cdot \mathbf{u}_{DA}$, $\mathbf{T}_{FB} = 2\,000 \cdot \mathbf{u}_{FB}$, $\mathbf{T}_{EC} = 2\,000 \cdot \mathbf{u}_{EC}$, on \mathbf{u}_{DA} , \mathbf{u}_{FB} , \mathbf{u}_{EC} són els vectors unitaris en les direccions de les tensions.

Les coordenades dels punts, expressades en m, serien: $A(6, 0, 0)$; $B(-3, 6 \cdot \cos 30^\circ, 0) \equiv B(-3; 5, 20; 0)$; $C(-3, -6 \cdot \cos 30^\circ, 0) \equiv C(-3; -5, 20; 0)$; $D(0, 0, 5)$; $E(0, 0, 10)$; $F(0, 0, 15)$. Així, els vectors unitaris quedarien:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{DA} &= \frac{(6, 0, -5)}{|(6, 0, -5)|} \approx (0, 678; 0; -0, 640) \\ \mathbf{u}_{FB} &= \frac{(-3; -5, 20; -15)}{|(-3; -5, 20; -15)|} \approx (-0, 186; 0, 322; -0, 928) \\ \mathbf{u}_{DA} &= \frac{(-3; -5, 20; -10)}{|(-3; -5, 20; -10)|} \approx (0, 257; -0, 446; -0, 858) \end{aligned}$$

Per tant, les tensions aplicades, expressades en kp, valdrien:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{DA} &= 2000 \cdot \mathbf{u}_{DA} = (1\,536, 0, 1\,280) \\ \mathbf{T}_{FB} &= 2000 \cdot \mathbf{u}_{FB} = (-372, 644, -1\,856) \\ \mathbf{T}_{EC} &= 2000 \cdot \mathbf{u}_{EC} = (-514, -892, -1\,716) \end{aligned}$$

La **resultant del sistema de forces** és, per tant: $\mathbf{R} = (650, -248, -7\,852)$ kp. El **moment resultant principal del sistema de forces** seria:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_O &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -500 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2\,500 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & 5 \\ 1\,536 & 0 & -1\,280 \end{vmatrix} + \\ &+ \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & 15 \\ -372 & 644 & -1\,856 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & 10 \\ -514 & -892 & -1\,716 \end{vmatrix} = (-740, -2\,040, 0) \text{ kp}\cdot\text{m} \end{aligned}$$

El **torçor de reacció** que actuaria en la base del pal per a mantenir l'equilibri seria, doncs: $\mathbf{R}_R = -\mathbf{R} = (-650, 248, 7\,852)$ kp i $\mathbf{M}_{0R} = -\mathbf{M}_0 = (740, 2\,040, 0)$ kp·m.

El quart cable faria una tensió $\mathbf{T} = (T_x, T_y, T_z)$ aplicada en $Q(0, 0, z)$. Com que la reacció en O ha de ser vertical, només tindrà component z negativa i es verifica:

$$\begin{aligned} (T_x, T_y, T_z) + (650, -248, -7\,852) &= (0, 0, R_z) \\ \mathbf{M}'_O &= (-740, -2\,040, 0) + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & z \\ T_x & T_y & T_z \end{vmatrix} = (-740, -2\,040, 0) + \\ &+ (-z \cdot T_y, z \cdot T_x, 0) = (-740 - z \cdot T_y, -2\,040z \cdot T_x, 0) = (0, 0, 0) \end{aligned}$$

perquè la resultant ha de passar per O. De les igualtats vectorials s'obté un sistema d'equacions lineals la resolució del qual proporcionarà el valor de la tensió i un punt d'aplicació.

$$\left. \begin{aligned} T_x + 650 &= 0 \implies T_x = -650 \text{ kp} \\ T_y - 248 &= 0 \implies T_y = 248 \text{ kp} \\ T_z - 7\,852 &= R_z \implies T_z = 7\,852 + R_z \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} -740 - z \cdot T_y &= 0 \implies z = -740/T_y = -3,13 \text{ m} \\ -2\,040 + z \cdot T_x &= 0 \implies z = 2\,040/T_x = -2,98 \text{ m} \end{aligned} \right\}$$

Per tant, la conclusió és que **no es podria afegir un quart cable i aconseguir l'equilibri**.

Exercici 1.24 Es té un element escultòric de pedra calcària (densitat $= 2 \text{ g/cm}^3$) la forma del qual és paral·lelepípedica, amb un buit de forma similar, tal com s'indica en la figura 1.24 de la pàgina 20. Aquesta peça es pretén penjar en una sala, de manera que la seua cara inferior estiga a 3 m respecte del sòl i paral·lela a aquest, coincidint el centre geomètric de la sala amb el de la cara superior de la peça (vegeu la figura 1.24). Es demana:

1. Si la peça ha d'estar sostinguda per una argolla en el punt O de la cara superior, de la qual ixen tres cables fins als punts A, B i C, calculeu la tensió en cadascun dels cables que subjecten la peça i la posició del punt O.
2. Seria possible suspendre la peça d'un únic cable, en lloc dels tres mencionats? Si és així, calculeu en quin punt de la cara superior hauria de subjectar-la i quant valdria la tensió en el cable del qual penja.
3. Supposeu ara que la peça se subjecta amb una barra soldada en el centre de la cara superior. Quin seria el torçor de reacció que aquesta barra hauria d'exercir per a mantenir la peça en les mateixes condicions del primer apartat?
4. Si els cables són d'acer, mòdul de Young $= 2 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$ i el seu diàmetre és de 2 cm, calculeu la deformació absoluta que pateix cadascun en la situació descrita en el primer apartat.

Per a resoldre el primer apartat, cal tindre en compte que la condició que s'ha de verificar perquè la cara superior de la peça es mantinga horitzontal és que el punt O estiga sobre la vertical del centre de gravetat de la peça. L'escultura original es pot considerar com la diferència de dos paral·lelepípedes: un de dimensions $2 \times 1,5 \times 0,8$ (longituds en metres), i un altre de dimensions $1,5 \times 1 \times 0,5$ (també en metres i corresponent al buit de la peça).

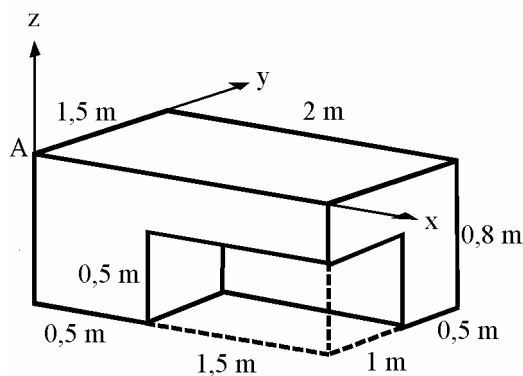


Figura 1.63: Especejament de la peça escultòrica de l'exercici 1.24.

Tenint en compte el sistema de referència de la figura 1.63 amb origen en A, els pesos i les coordenades del centre de gravetat serien:

$$P_1 = 2 \cdot 1,5 \cdot 0,8 \cdot 2000 = 4800 \text{ kp}; \quad G_1(1; 0,75) \text{ m}$$

$$P_2 = 1,5 \cdot 1 \cdot 0,5 \cdot 2000 = 1500 \text{ kp}; \quad G_2(1,25; 0,5) \text{ m}$$

D'aquesta forma les coordenades del centre de gravetat es poden determinar a partir de:

$$x_G = \frac{x_{1G} \cdot P_1 - x_{2G} \cdot P_2}{P_1 - P_2} = \frac{1 \cdot 4800 - 1,25 \cdot 1500}{4800 - 1500} \approx 0,89 \text{ m}$$

$$y_G = \frac{y_{1G} \cdot P_1 - y_{2G} \cdot P_2}{P_1 - P_2} = \frac{0,75 \cdot 4800 - 0,5 \cdot 1500}{4800 - 1500} \approx 0,86 \text{ m}$$

Per tant, el punt O es troba en la vertical de $G(0,89;0,86)$ m i sobre la cara superior de la peça. **La posició del punt O**, respecte del sistema de referència que es mostra en la figura 1.64 és $O(5,89;5,11;3,8)$ m. El pes de l'escultura en forma vectorial és $\mathbf{P}_{\text{escultura}} = (0,0,-3300)$ kp.

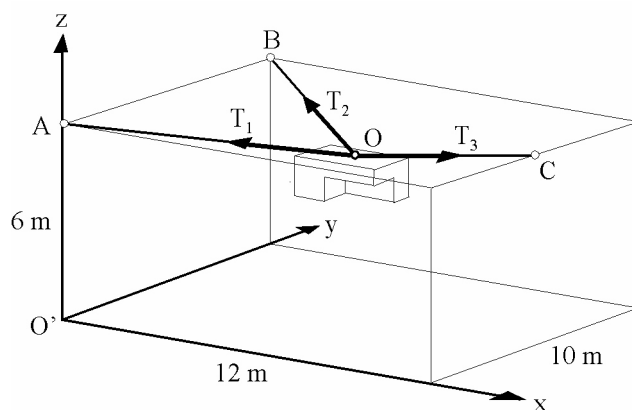


Figura 1.64: Il·lustració de la peça escultòrica dins de la sala de l'exercici 1.24.

El sistema de forces, les tensions dels cables i el pes de l'escultura, és concurrent en O. Per tant, només caldrà que el sumatori de les forces siga nul perquè es complisca la condició d'equilibri. A partir de la figura 1.64 s'obtingran les coordenades dels punts A, B i C, així com els vectors unitaris en la direcció de les respectives tensions.

$$A(0,0,6) \text{ m}; \quad B(0,10,6) \text{ m}; \quad C(12,5,6) \text{ m}$$

$$|\mathbf{OA}| \approx 8,10 \text{ m}; \quad |\mathbf{OB}| \approx 7,97 \text{ m}; \quad |\mathbf{OC}| \approx 6,49 \text{ m};$$

L'expressió vectorial que dóna l'equilibri d'aquest sistema és:

$$\mathbf{T}_{OA} + \mathbf{T}_{OB} + \mathbf{T}_{OC} + \mathbf{P}_{\text{escultura}} = \mathbf{0}$$

$$T_{OA} \cdot \mathbf{u}_{OA} + T_{OB} \cdot \mathbf{u}_{OB} + T_{OC} \cdot \mathbf{u}_{OC} + \mathbf{P}_{\text{escultura}} = \mathbf{0}$$

on s'ha posat el vector tensió corresponent a cada cable com el mòdul d'aquesta pel seu vector unitari en la direcció de cada cable. Per a obtenir l'equació vectorial a resoldre, el primer pas consisteix a determinar els vectors unitaris:

$$\mathbf{u}_{OA} = \frac{\mathbf{OA}}{|\mathbf{OA}|} = \frac{(-5,89;-5,11;2,2)}{8,10} = (-0,727;-0,631;0,272)$$

$$\mathbf{u}_{OB} = \frac{\mathbf{OB}}{|\mathbf{OB}|} = \frac{(-5,89;4,89;2,2)}{7,97} = (-0,739;0,614;0,276)$$

$$\mathbf{u}_{OC} = \frac{\mathbf{OC}}{|\mathbf{OC}|} = \frac{(6, 11; -0, 11; 2, 2)}{|\mathbf{OC}|} = (0, 941; -0, 017; 0, 339)$$

S'ha de complir que:

$$T_{OA} \cdot (-0, 727; -0, 631; 0, 272) + T_{OB} \cdot (-0, 739; 0, 614; 0, 276) + T_{OC} \cdot (0, 941; -0, 017; 0, 339) = (0, 0, 3300)$$

Igualant component a component s'arriba al sistema d'equacions lineal següent:

$$\left. \begin{aligned} -0, 727 \cdot T_{OA} - 0, 739 \cdot T_{OB} + 0, 941 \cdot T_{OC} &= 0 \\ -0, 631 \cdot T_{OA} + 0, 614 \cdot T_{OB} - 0, 017 \cdot T_{OC} &= 0 \\ 0, 272 \cdot T_{OA} + 0, 276 \cdot T_{OB} + 0, 339 \cdot T_{OC} &= 3300 \end{aligned} \right\}$$

Resolent el sistema d'equacions anterior s'obté que:

$$T_{OA} \approx 2959 \text{ kp}; T_{OB} \approx 3173 \text{ kp}; T_{OC} \approx 4777 \text{ kp}$$

Sí és possible substituir els tres cables per un. Com que el punt O es troba en la vertical que passa pel centre de gravetat de l'escultura, el cable subjectarà l'escultura en el punt O en la direcció perpendicular a la cara superior d'aquesta. La tensió del cable serà igual al pes de l'escultura, 3300 kp.

Per a determinar **el torçor de reacció que exerceix la barra soldada en el centre de la cara superior de la peça**, s'haurà de calcular el torçor del sistema inicial en aquest punt. Si considerem el punt O com l'origen del sistema de referència, les coordenades del centre de la cara superior de la peça seria $G'(0, 11; -0, 11; 0)$ m. Així, el torçor en O és:

$$\mathbf{R} = (0, 0, -3300) \text{ kp}; \quad \mathbf{M}_O = (0, 0, 0) \text{ kp} \cdot \text{m}$$

Utilitzant la condició d'invariant de la resultant i l'equació del camp de moments, el torçor en G' seria:

$$\mathbf{M}_{G'} = \mathbf{M}_O - \mathbf{OG}' \times \mathbf{R} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0, 11 & -0, 11 & 0 \\ 0 & 0 & -3300 \end{vmatrix} = (363, 363, 0) \text{ kp} \cdot \text{m}$$

Per tant, **el torçor de reacció** demanat en el tercer apartat és:

$$\mathbf{R} = (0, 0, 3300) \text{ kp}; \quad \mathbf{M}_{O'} = (-363, -363, 0) \text{ kp} \cdot \text{m}$$

Assumint que la deformació dels cables verifica la llei de Hooke, és a dir, una relació lineal entre la tensió i la deformació axial elàstica (vegeu capítol 10 de [13], per exemple):

$$\sigma = E \cdot \epsilon \longrightarrow \frac{F}{S} = E \cdot \frac{\Delta l}{l} \longrightarrow \Delta l = \frac{F \cdot l}{S \cdot E}$$

Prenent els valors següents:

$$S = \pi \cdot r^2 \approx 3,14 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2; \quad E = 2 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$$

les deformacions absolutes que pateixen cadascun dels cables, que demana l'últim apartat, serien les següents:

$$\Delta l_{OA} = \frac{2959 \cdot 9,8 \cdot 8,10}{3,14 \cdot 10^{-4} \cdot 2 \cdot 10^{11}} \approx 3,7 \text{ mm}$$

$$\Delta l_{OB} = \frac{3173 \cdot 9,8 \cdot 7,97}{3,14 \cdot 10^{-4} \cdot 2 \cdot 10^{11}} \approx 3,9 \text{ mm}$$

$$\Delta l_{OC} = \frac{4777 \cdot 9,8 \cdot 6,49}{3,14 \cdot 10^{-4} \cdot 2 \cdot 10^{11}} \approx 4,8 \text{ mm}$$

Exercici 1.25 Sobre la porta de la figura 1.25, de la pàgina 21 les dimensions de les quals s'expressen en m, actuen les forces i sistemes de forces següents: una força F de 20 kp, aplicada en un cantó de la porta; el pes de la porta, P_{porta} , de valor 30 kp; i la reacció de la frontissa, que actua al llarg d'un costat de la porta, el torçor de la qual és

$$\mathbf{R}_F = (0, -5, 10) \text{ kp}; \quad \mathbf{M}_{O_F} = (25, -2, -15) \text{ kp} \cdot \text{m}.$$

Sobre la porta es barra una barra AB els extrems de la qual no llisquen ni sobre la porta ni sobre el sòl. Es pregunta si serà efectiva aquesta barra i, si no és així, on s'hauria de col·locar. Es recorda que la barra només pot treballar a compressió.

Perquè la barra siga efectiva, les condicions que hauria de complir el sistema serien que:

- La resultant tinga la direcció de la barra \mathbf{AB} (compressió).
- El moment resultant en el punt A ha de ser nul.

El sistema de forces sobre la porta és:

$$\mathbf{F} = (0, 20, 0); \text{ aplicada en } (0, 0, 2)$$

$$\mathbf{P} = (0, 0, -30); \text{ aplicada en } (-0, 6; 0; 1)$$

$$\mathbf{R}_F = (0, -5, 10); \text{ aplicada en } (0, 0, 0)$$

$$\mathbf{M}_{O_F} = (25, 38, 15);$$

on les forces s'expressen en kp, el moment en kp·m i les coordenades dels punts en m. La figura 1.65 mostra el diagrama de sòlid lliure corresponent al sistema de forces que actua sobre la porta.

Com que la resultant $\mathbf{R} = (0, 20, 0) + (0, 0, -30) + (0, -5, 10) = (0, 15, -20)$ kp és un vector paral·lel a l' $\mathbf{AB} = (-0, 2; 0, 75; 0) - (-0, 2; 0; 1) = (0; 0, 75; -1)$, perquè $0/0 = 0, 75/15 = -1/-20$, aquesta actua comprimint-la.

El moment resultant principal del sistema és:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_O &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 20 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -0,6 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -30 \end{vmatrix} + (25, -2, -15) = \\ &= (-15, -20, -15) \text{ kp} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

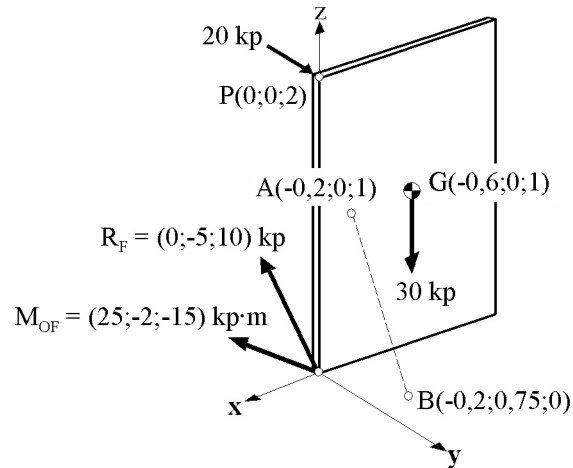


Figura 1.65: Sistema de forces que actua sobre la porta de l'exercici 1.25

El moment resultant respecte del punt A es pot calcular a partir de l'equació de camp de moments, obtenint-se el resultat següent:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_A = \mathbf{M}_O - \mathbf{OA} \times \mathbf{R} &= (-15, -20, -15) - \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -0,2 & 0 & 1 \\ 0 & 15 & -20 \end{vmatrix} = \\ &= (0, -16, -12) \text{ kp} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

Per tant, com que aquest moment és diferent de zero, caldrà desplaçar la barra paral·lelament a si mateixa fins a un punt A' les coordenades del qual serien $(x, 0, 1)$. S'haurà de verificar que:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{A'} &= (-15, -20, -15) - \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & 0 & 1 \\ 0 & 15 & -20 \end{vmatrix} = \\ &= (0, -20 - 20 \cdot x, -15 - 15 \cdot x) = (0, 0, 0) \text{ kp} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

La solució que s'obté és $x = -1$ m, punt que es troba dins de les dimensions de la porta.

Exercici 1.26 Sobre un generador eòlic, vegeu la figura 1.26 de la pàgina 22, actuen les forces següents: a) els pes dels elements motors i compensadors P_1 , de valor 5 t, actuant la resultant a una distància de 2,5 m de l'eix de la torre; b) el pes de l'hèlice, de valor 2 500 kp, actuant a una distància de 5 m de l'eix de la torre; c) el pes de la torre P_2 , de valor 10 t, actuant en el seu eix de simetria; d) la força del vent sobre la torre, sent la pressió d'aquest F_p 10 kp/m², actuant sobre una àrea equivalent a la secció vertical de la torre (un trapezi isòsceles de 6 m de base major, 3 m de base menor i 40 m d'altura); e) quan l'hèlice està travada en una certa posició, el vent produeix sobre el sistema una força resultant de 2 t i un moment de valor 4 t·m, ambdós en la direcció de l'eix de l'hèlice, que a la vegada està orientat segons l'eix OX. Calculeu:

1. Torçor del sistema en l'origen de coordenades O.
2. Invariants del sistema.
3. Eix central.
4. Torçor de reacció que el sòl ha d'exercir sobre la torre.
5. Es podria anul·lar el sistema inicial amb una única força?
I amb una força i un parell?

Els components i punts d'aplicació (o punts de la seua línia d'acció) són els següents:

$$\begin{aligned}
 P_1 &= (0, 0, -5); & \text{aplicada en } (-2, 5; 0; 0) \\
 P_2 &= (0, 0, -10); & \text{aplicada en } (0, 0, 0) \\
 P_{\text{hèlice}} &= (0; 0; -2, 5); & \text{aplicada en } (5, 0, 0) \\
 F_{V_{\text{hèlice}}} &= (-2, 0, 0); & \text{aplicada en } (0, 0, 40) \\
 F_{\text{vent}} &= (-1, 8; 0; 0); & \text{aplicada en } (0; 0; 17, 78)
 \end{aligned}$$

on les forces s'expressen en unitats de 10^3 kp i les coordenades dels punts en m. La figura 1.66 mostra el diagrama de sòlid lliure corresponent al sistema de forces que actua sobre el generador eòlic. La força deguda al vent s'ha calculat de la manera següent:

$$F_{\text{vent}} = p_{\text{vent}} \cdot S = 10 \cdot \frac{6 + 3}{2} \cdot 40 = 1\,800 \text{ kp}.$$

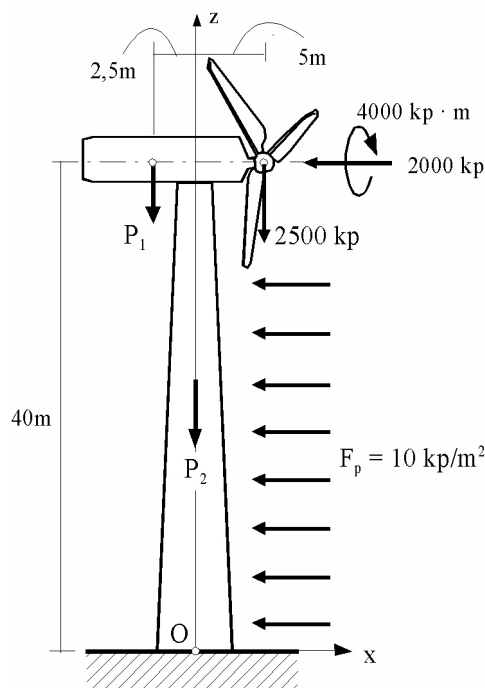


Figura 1.66: Il·lustració del generador eòlic de l'exercici 1.26

Mentre que el punt d'aplicació d'aquesta força seria el centre de gravetat z_G de la secció vertical de la torre:

$$z_G = \frac{(6 + 2 \cdot 3) \cdot 40}{3 \cdot (6 + 3)} \approx 17,78 \text{ m}.$$

La **resultant del sistema de forces** és, per tant: $\mathbf{R} = (-3, 8; 0; -17, 5) \cdot 10^3$ kp. El **moment resultant principal del sistema de forces** seria:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_O &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -2,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 5 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & -2,5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & 40 \\ -2 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \\ &+ \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & 17,78 \\ -1,8 & 0 & 0 \end{vmatrix} + (-4, 0, 0) = (-4, -112, 0) \cdot 10^3 \text{ kp} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

Els **invariants del sistema** són la resultant ($\equiv I_1$) i el mòdul del moment mínim:

$$|\mathbf{m}| = \mathbf{u}_R \cdot \mathbf{M}_O = \frac{(-3, 8; 0; -17, 5) \cdot (-4, -112, 0)}{17,91} \approx 0,849$$

Pel que fa a l'**equació de l'eix central (EC)**, siga $E(x, y, z)$ un punt qualsevol pertanyent a l'EC. D'acord amb l'equació del camp de moments es verifica que:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_E &= \mathbf{M}_O - \mathbf{OE} \times \mathbf{R} = (-4, -112, 0) - \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ -3,8 & 0 & 17,5 \end{vmatrix} = \\ &= (-4, -112, 0) - (-17, 5y; 17, 5x - 3, 8z; 3, 8y) = \\ &= (-4 + 17, 5y; -112 - 17, 5x + 3, 8z; -3, 8y) \end{aligned}$$

Tenint en compte que la resultant i l'eix central són paral·lels, l'equació de l'EC es pot expressar com:

$$\frac{-4 + 17, 5y}{-3, 8} = \frac{-112 - 17, 5x + 3, 8z}{0} = \frac{-3, 8y}{-17, 5}$$

i, per tant, és una recta paral·lela a l'eix OY amb $y = 0,218$ m l'expressió general de la qual és $4,61x - z + 29,5 = 0$.

El **torçor de reacció en O** que ha d'exercir sobre la torre per a mantenir l'equilibri serà:

$$\mathbf{R}_R = (3, 8; 0; 17, 5) \cdot 10^3 \text{ kp}, \mathbf{M}_{OR} = (4, 112, 0) \cdot 10^3 \text{ kp} \cdot \text{m}.$$

Per a poder anul·lar amb una única força el sistema inicial, s'ha de verificar que el moment mínim o segon invariant siga nul. Com que s'ha obtingut un moment mínim diferent de zero, **la resposta a la primera qüestió del 5é apartat és no. La resposta a la segona qüestió del 5é apartat és sí**, perquè només hem d'afegir un parell de forces el moment del qual tinga un valor igual al moment mínim i de sentit contrari. Per tant, el sistema equilibrant seria (en les unitats utilitzades al llarg d'aquest exercici) la força i el parell següents:

$$\mathbf{F} \equiv -\mathbf{R} = (3, 8; 0; 17, 5); \text{ aplicada en } (\lambda; 0, 218; 4, 61\lambda + 29, 5)$$

$$\mathbf{M}_{parell} \equiv \mathbf{M}_E \equiv \mathbf{m} = (0, 1801; 0; 0, 829)$$

Exercici 1.27 Atesa la secció que mostra la figura 1.27 de la pàgina 23, es demana:

1. En quin punt de la línia AB s'hauria de penjar perquè aquest costat romanguera horitzontal?
2. Calculeu els moments d'inèrcia i eixos principals centrals de la secció.
3. Supposeu que la secció recolza sobre el sòl per la seua part corba, en quin punt concret d'aquesta part recolzaria la secció en l'equilibri? Raoneu-ho. Es considera que el gruix de la secció és suficient per a mantenir-la vertical sobre el sòl.

Per a aconseguir que el costat AB de la secció estiga horitzontal, el punt pel qual caldria penjar-la ha d'estar sobre la vertical del centre de gravetat d'aquesta. L'especejament de la secció es mostra en la figura 1.67.

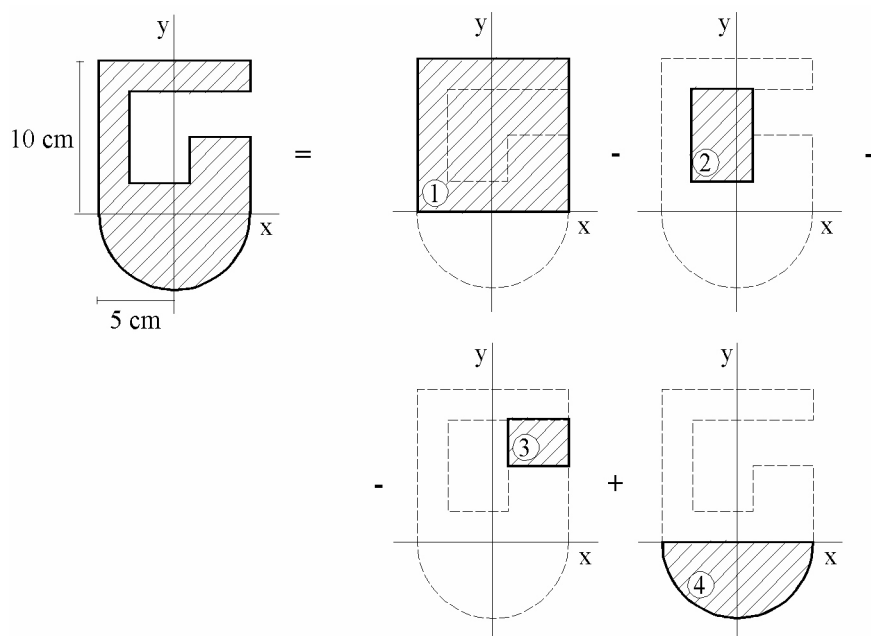


Figura 1.67: Especejament de la secció de l'exercici 1.27

Atesa la figura 1.67, els valors dels centres de gravetat i superfícies dels trossos de la secció es dona en la taula 1.1.

Taula 1.1: Centres de gravetat i superfícies de les seccions considerades en la Fig. 1.67

Tros	$S_i \text{ (cm}^2\text{)}$	$x_{iG} \text{ (cm)}$	$y_{iG} \text{ (cm)}$	$S_i \cdot x_{iG} \text{ (cm}^3\text{)}$	$S_i \cdot y_{iG} \text{ (cm}^3\text{)}$
1	100	0	5	0	500
2	-24	-1	5	24	-120
3	-12	3	6,5	-36	-78
4	39,27	0	-2,12	0	-83,33
Σ	103,27			-12	218,67

Utilitzant els valors de la taula 1.1 s'obtenen **les coordenades del centre de gravetat** de la secció:

$$x_G = \frac{\sum x_{iG} \cdot S_i}{\sum S_i} = \frac{-12}{103,27} \approx -0,12 \text{ cm}$$

$$y_G = \frac{\sum y_{iG} \cdot S_i}{\sum S_i} = \frac{218,67}{103,27} \approx 2,12 \text{ cm}$$

Per tant, d'acord al sistema de referència utilitzat en la figura 1.67, **el punt de la línia AB** on s'hauria de penjar la secció tindria les coordenades $(-0,116; 10)$.

Els moments d'inèrcia i el producte d'inèrcia respecte dels eixos OXY, figura 1.67, són:

$$I_x = \sum_{i=1}^4 I_{x_i} = \frac{10 \cdot 10^3}{3} - \left(\frac{4 \cdot 6^3}{12} + 24 \cdot 5^2 \right) - \left(\frac{4 \cdot 3^3}{12} + 12 \cdot 6,5^2 \right) + \frac{\pi \cdot 5^4}{8} \approx$$

$$\approx 2391 \text{ cm}^4$$

$$I_y = \sum_{i=1}^4 I_{y_i} = \frac{10^3 \cdot 10}{12} - \left(\frac{4^3 \cdot 6}{12} + 24 \cdot 1^2 \right) - \left(\frac{4^3 \cdot 3}{12} + 12 \cdot 3^2 \right) + \frac{\pi \cdot 5^4}{8} \approx$$

$$\approx 899 \text{ cm}^4$$

$$P_{xy} = \sum_{i=1}^4 P_{xy_i} = 0 - (0 + 24 \cdot (-1) \cdot 5) - (0 + 12 \cdot 3 \cdot 6,5) + 0 \approx -114 \text{ cm}^4$$

A continuació, i aplicant-hi el teorema de Steiner, s'obtenen els moments d'inèrcia respecte als eixos $X_G Y_G$:

$$I_{x_G} = I_x - (y_G)^2 \cdot S = 2391 - 2,12^2 \cdot 103,27 \approx 1928 \text{ cm}^4$$

$$I_{y_G} = I_y - (x_G)^2 \cdot S = 899 - 0,12^2 \cdot 103,27 \approx 897 \text{ cm}^4$$

$$P_{x_G y_G} = P_{xy} - x_G \cdot y_G \cdot S = -114 - 2,12 \cdot (-0,12) \cdot 103,27 \approx -88 \text{ cm}^4$$

Els invariants d'inèrcia J_1 i J_2 són:

$$J_1 = I_{x_G} + I_{y_G} = 1928 + 897 = 2825 \text{ cm}^4$$

$$J_2 = I_{x_G} \cdot I_{y_G} - P_{x_G y_G}^2 = 1928 \cdot 897 - (-88)^2 \approx 1,722 \cdot 10^6 \text{ cm}^8$$

$$I_{x_{G_0}} = \frac{J_1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{J_1}{2} \right)^2 - J_2} =$$

$$= 1412 \pm \sqrt{(1412)^2 - 1,722 \cdot 10^6} \approx 1412 \pm 522 \text{ cm}^4$$

Com que el valor màxim i el mínim són $I_{x_{G_0}}$ i $I_{y_{G_0}}$, respectivament, això implica que **els moments principals centrals d'inèrcia** són:

$$I_{x_{G_0}} = 1412 + 522 = 1934 \text{ cm}^4$$

$$I_{y_{G_0}} = 1412 - 522 = 890 \text{ cm}^4$$

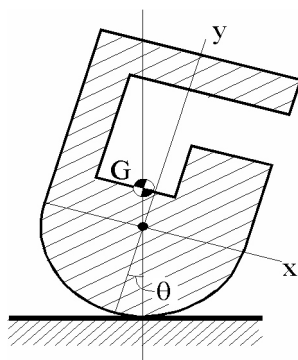


Figura 1.68: Il·lustració del recolzament de la secció sobre el sòl en el tercer apartat de l'exercici 1.27

Finalment, les **direccions principals centrals d'inèrcia** s'obtenen a partir de l'equació següent:

$$\theta = \arctan \frac{I_{x_G} - I_{x_{G_0}}}{P_{x_G y_G}} = \frac{1\,928 - 1\,934}{-88} \Rightarrow \theta = 3,9^\circ$$

Per a mantenir l'equilibri, cal que el punt de contacte amb el sòl i el centre de gravetat estiguen sobre la mateixa vertical (vegeu la figura 1.68). Per tant, l'angle que s'inclinaria aquesta secció respecte de la vertical és θ :

$$\theta = \arctan \frac{0,12}{2,12} \approx 3,2^\circ.$$

Exercici 1.28 Atesa la secció que mostra la figura 1.28 de la pàgina 24, la densitat superficial de la qual és de 20 kp/m^2 , es demana:

1. Coordenades del centre de gravetat.
2. Eixos i moments d'inèrcia principals centrals.
3. Si la secció recolza sobre un sòl horitzontal perquè gire lliurement, quin angle formarà el segment OA respecte de la vertical?
4. Quina força horitzontal (valor i sentit), aplicada en el punt B, s'hauria d'aplicar per a mantenir la secció amb l'eix OA vertical?

Per a aconseguir que el costat AB estiga horitzontal, el punt pel qual s'hauria de penjar la secció ha d'estar sobre la vertical del centre de gravetat d'aquesta. L'especejament de la secció es mostra en la figura 1.69.

Atesa la figura 1.69, els valors dels centres de gravetat i superfícies dels trossos de la secció es dona en la taula 1.2.

Utilitzant els valors de la taula 1.2 s'obtenen les **coordenades del centre de gravetat** de la secció:

$$x_G = \frac{\sum x_{iG} \cdot S_i}{\sum S_i} = \frac{-29\,699}{9\,998} \approx -2,97 \text{ cm}$$

$$y_G = \frac{\sum y_{iG} \cdot S_i}{\sum S_i} = \frac{38\,860}{9\,998} \approx 3,89 \text{ cm}$$

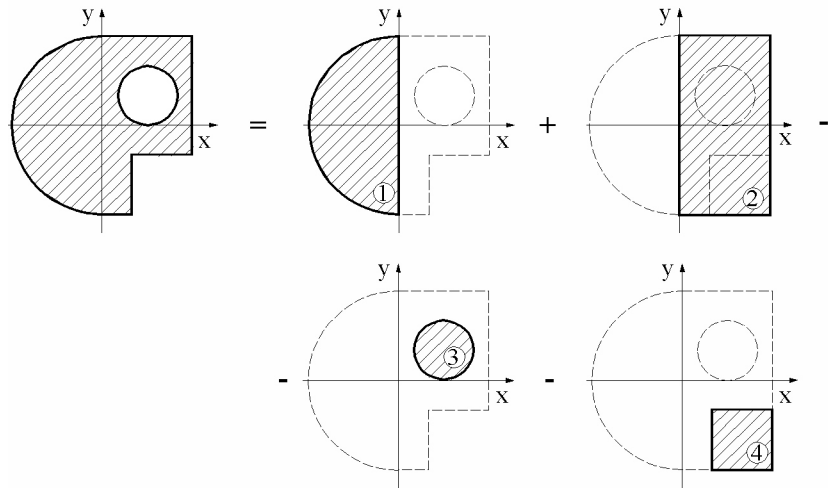


Figura 1.69: Especejament de la secció de l'exercici 1.28

Taula 1.2: Centres de gravetat i superfícies de les seccions considerades en la Fig. 1.69

Tros	S_i (cm^2)	x_{iG} (cm)	y_{iG} (cm)	$S_i \cdot x_{iG}$ (cm^3)	$S_i \cdot y_{iG}$ (cm^3)
1	5 655	-25,46	0	-144 000	0
2	7 200	30	0	216 000	-12
3	-1 257	30	20	-37 699	-25 140
4	-1 600	40	-40	-64 000	64 000
Σ	9 998			-29 699	38 860

Els moments d'inèrcia i el producte d'inèrcia respecte dels eixos OXY, figura 1.67, són:

$$\begin{aligned}
 I_x &= \sum_{i=1}^4 I_{x_i} = \frac{\pi \cdot 60^4}{8} + \frac{60 \cdot 120^3}{12} - \left(\frac{\pi \cdot 20^4}{4} + \pi \cdot 20^2 \cdot 20^2 \right) - \\
 &\quad - \left(\frac{1}{12} \cdot 40^4 + 40^2 \cdot 40^2 \right) \approx 1,033 \cdot 10^7 \text{ cm}^4 \\
 I_y &= \sum_{i=1}^4 I_{y_i} = \frac{\pi \cdot 60^4}{8} + \frac{120 \cdot 60^3}{3} - \left(\frac{\pi \cdot 20^4}{4} + \pi \cdot 20^2 \cdot 30^2 \right) - \\
 &\quad - \left(\frac{\pi \cdot 40^4}{12} + 40^2 \cdot 40^2 \right) \approx 9,699 \cdot 10^6 \text{ cm}^4 \\
 P_{xy} &= \sum_{i=1}^4 P_{xy_i} = 0 + 0 - (0 + \pi \cdot 20^2 \cdot 20 \cdot 30) - [0 + 40^2 \cdot 40 \cdot (-40)] \\
 &\quad \approx 1,806 \cdot 10^6 \text{ cm}^4
 \end{aligned}$$

A continuació, i aplicant-hi el teorema de Steiner, s'obtenen els moments d'inèrcia respecte als eixos $X_G Y_G$:

$$\begin{aligned}
 I_{x_G} &= I_x - (y_G)^2 \cdot S = 1,033 \cdot 10^7 - 3,89^2 \cdot 9 998 = 1,018 \cdot 10^7 \text{ cm}^4 \\
 I_{y_G} &= I_y - (x_G)^2 \cdot S = 9,699 \cdot 10^6 - 2,97^2 \cdot 9 998 = 9,611 \cdot 10^6 \text{ cm}^4
 \end{aligned}$$

$$P_{x_G y_G} = P_{xy} - x_G \cdot y_G \cdot S = 1,806 \cdot 10^6 - 3,89 \cdot (-2,97) \cdot 9998 \approx 1,922 \cdot 10^6 \text{ cm}^4$$

Els invariants d'inèrcia J_1 i J_2 són:

$$J_1 = I_{x_G} + I_{y_G} = 1,018 \cdot 10^7 + 9,611 \cdot 10^6 = 1,979 \cdot 10^7 \text{ cm}^4$$

$$J_2 = I_{x_G} \cdot I_{y_G} - P_{x_G y_G}^2 = 1,018 \cdot 10^7 \cdot 9,611 \cdot 10^6 - (1,922 \cdot 10^6)^2 = 9,412 \cdot 10^{13} \text{ cm}^8$$

$$I_{x_{G_0}} = \frac{J_1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{J_1}{2}\right)^2 - J_2} =$$

$$= 9,895 \cdot 10^6 \pm \sqrt{(9,895 \cdot 10^6)^2 - 9,412 \cdot 10^{13}} = 9,895 \cdot 10^6 \pm 1,947 \cdot 10^6 \text{ cm}^4$$

Com que el valor màxim i el mínim són $I_{x_{G_0}}$ i $I_{y_{G_0}}$, respectivament, això implica que **els moments principals centrals d'inèrcia** són:

$$I_{x_{G_0}} = 9,895 \cdot 10^6 + 1,947 \cdot 10^6 = 1,184 \cdot 10^7 \text{ cm}^4$$

$$I_{y_{G_0}} = 9,895 \cdot 10^6 - 1,947 \cdot 10^6 = 7,948 \cdot 10^6 \text{ cm}^4$$

Finalment, **les direccions principals centrals d'inèrcia** s'obtenen a partir de l'equació següent:

$$\theta = \arctan \frac{I_{x_G} - I_{x_{G_0}}}{P_{x_G y_G}} = \frac{1,018 \cdot 10^7 - 1,184 \cdot 10^7}{1,922 \cdot 10^6} \Rightarrow \theta = -40,8^\circ$$

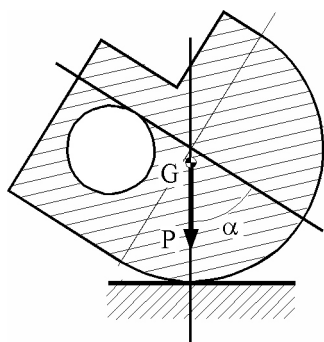


Figura 1.70: Il·lustració del gir de la secció en el tercer apartat de l'exercici 1.28

En deixar girar la secció lliurement el punt de contacte i el centre de gravetat han d'estar sobre la mateixa vertical (vegeu la figura 1.70). Per tant, **l'angle que formaria el segment OA respecte de la vertical és α :**

$$\alpha = \arctan \frac{3,89}{2,97} \approx 52,6^\circ$$

Per a determinar la força que s'ha d'aplicar en el punt B perquè l'eix OA siga vertical, calculem l'equilibri de moments respecte del punt de contacte amb el sòl (tal com s'il·lustra en la figura 1.71):

$$M_A = 0 = F \cdot 120 - P \cdot 2,97 \longrightarrow F = \frac{P \cdot 2,97}{120}$$

Tenint en compte que el pes P de la secció és $P = 20 \cdot 10^{-4} \cdot 9998 \approx 20,00 \text{ kp}$ **la força horitzontal**, amb el sentit indicat en la figura 1.71, tindria un valor de $F \approx 0,50 \text{ kp}$.

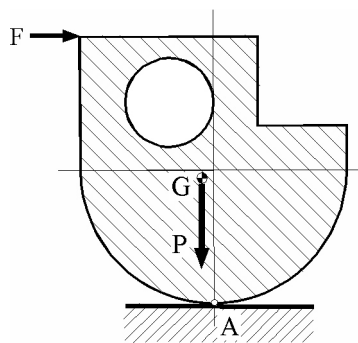


Figura 1.71: Il·lustració de la secció en el quart apartat de l'exercici 1.28

Exercici 1.29 En la figura 1.29 de la pàgina 25 es mostra un panell, la densitat superficial del qual és de 200 kp/m^2 , col·locat com a reclam en una botiga de còmics. S'indiquen les dimensions en dm. Sobre el panell apareix imprès la figura d'un cèlebre gos. El panell està subjectat en els punts A i B per sengles cables. El cable A forma un angle de 30° amb la vertical, mentre que el cable B forma un angle desconegut α . Es demana:

1. El valor d'aquest angle perquè el panell romanga horitzontal, així com els valors de les tensions que exerceixen els cables sobre el panell.
2. La matriu d'inèrcia del panell en el punt A, respecte d'uns eixos OX (horitzontal) i OY (vertical).
3. El moment d'inèrcia del panell respecte d'un eix que coincideixca amb el cable A.

La resultant de la força pes d'una distribució de massa s'aplica sobre el centre de gravetat d'aquesta. Per tant, atesa la figura 1.72 que mostra l'espedaçament del panell i el sistema de referència utilitzat, els centres de gravetat i superfícies que s'obtenen serien:

$$S_1 = 17 \cdot 19 = 323 \text{ dm}^2; \quad G_1(8, 5; 9, 5) \text{ dm}$$

$$S_2 = 5 \cdot 1 = 5 \text{ dm}^2; \quad G_2(2, 5; 0, 5) \text{ dm}$$

$$S_3 = 6 \cdot 6 = 30 \text{ dm}^2; \quad G_3(14, 5; 3) \text{ dm}$$

$$S_4 = 3 \cdot 1 = 3 \text{ dm}^2; \quad G_4(1, 5; 18, 5) \text{ dm}$$

$$S_5 = 8 \cdot 3 = 24 \text{ dm}^2; \quad G_5(7; 17, 5) \text{ dm}$$

$$\sum_{i=1}^5 S_i = 261 \text{ dm}^2$$

Aplicant les expressions generals per a les coordenades del centre de gravetat del panell s'obté que:

$$x_G = \sum_{i=1}^5 y_{iG} \cdot S_i / \sum_{i=1}^5 S_i$$

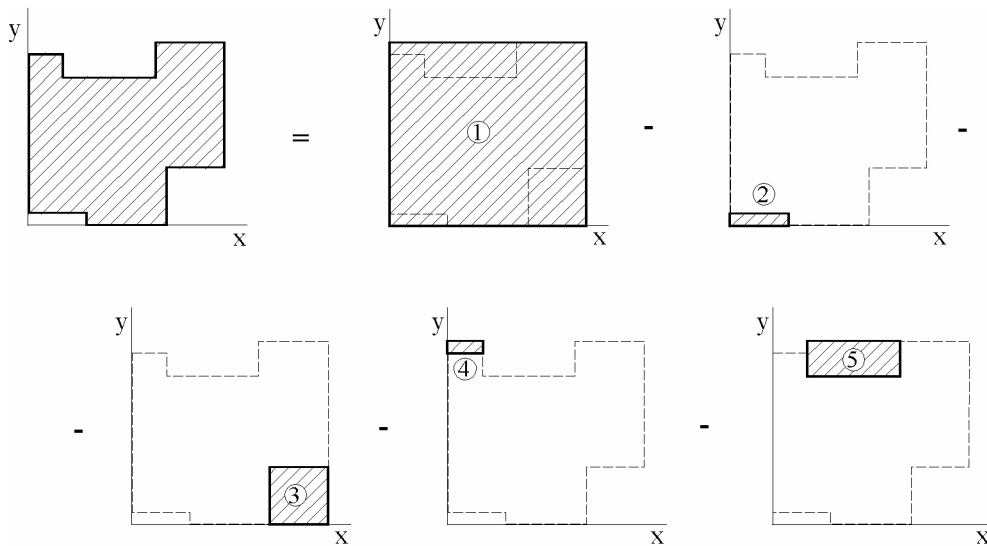


Figura 1.72: Espedaçament del panell publicitari de l'exercici 1.29

$$y_G = \frac{\sum_{i=1}^5 y_{iG} \cdot S_i}{\sum_{i=1}^5 S_i}$$

$$x_G = \frac{8,5 \cdot 323 - 2,5 \cdot 5 - 14,5 \cdot 30 - 1,5 \cdot 3 - 7 \cdot 24}{261} = 8,14 \text{ dm}$$

$$y_G = \frac{9,5 \cdot 323 - 0,5 \cdot 5 - 3 \cdot 30 - 18,5 \cdot 3 - 17,5 \cdot 24}{261} = 9,58 \text{ dm}$$

La figura 1.73 mostra el diagrama de sòlid lliure de les forces que actuen sobre el panell, on el pes d'aquest $P = 2,61 \cdot 200 = 522 \text{ kp}$, s'aplica en el centre de gravetat que s'ha calculat prèviament.

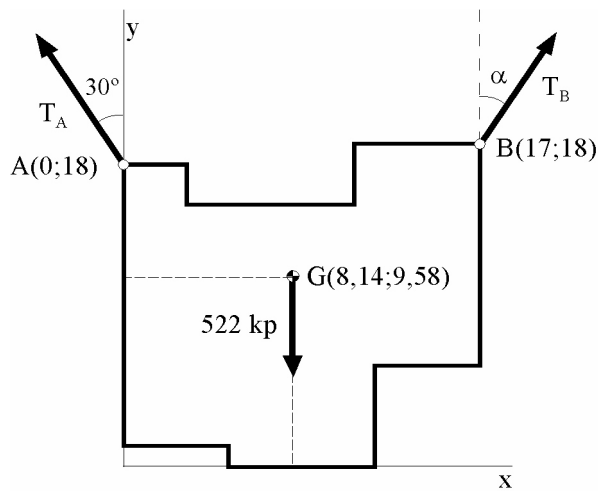


Figura 1.73: Diagrama de sòlid lliure del panell de l'exercici 1.29

Les condicions d'equilibri són aquelles en les quals el torçor del sistema de forces és nul. Per tant, s'ha de complir que:

$$\sum_{i=1}^2 F_{ix} = 0 = -T_A \cdot \sin 30^\circ + T_B \cdot \sin \alpha$$

$$\sum_{i=1}^3 F_{iy} = 0 = T_A \cdot \cos 30^\circ - 522 + T_B \cdot \cos \alpha$$

i prenent moments respecte del punt B, sent positiu el sentit de moviment de les agulles del rellotge, s'obtingria:

$$\sum_{i=1}^3 M_{iB} = 0 = T_A \cdot \sin 30^\circ \cdot 1 - T_A \cdot \cos 30^\circ \cdot 17 - 522 \cdot 8,86$$

Resolent aquest sistema d'equacions s'obtingrien les solucions següents:

$$T_A = 303,8 \text{ kp}, \quad T_B = 300,2 \text{ kp}, \quad \alpha = 30,4^\circ.$$

Per a respondre al segon apartat, la primera fase seria l'obtenció de la matriu d'inèrcia en O, i després traslladar-la al punt A. Per tant:

$$I_x = \sum_{i=1}^5 I_{xi} = \frac{17 \cdot 19^3}{3} - \frac{5 \cdot 1^3}{3} - \frac{5 \cdot 6^3}{3} - \left(\frac{3 \cdot 1^3}{12} + 3 \cdot 18,5^2 \right) -$$

$$- \left(\frac{8 \cdot 3^3}{12} + 24 \cdot 17,5^2 \right) \approx 30\,111 \text{ dm}^4$$

$$I_y = \sum_{i=1}^5 I_{yi} = \frac{19 \cdot 17^3}{3} - \frac{1 \cdot 5^3}{3} - \left(\frac{6 \cdot 5^3}{12} + 30 \cdot 14,5^2 \right) - \frac{1 \cdot 3^3}{3} -$$

$$- \left(\frac{3 \cdot 8^3}{12} + 24 \cdot 7^2 \right) \approx 23\,391 \text{ dm}^4$$

$$P_{xy} = \sum_{i=1}^5 P_{xyi} = \frac{17^2 \cdot 19^2}{4} - \frac{1^2 \cdot 5^2}{4} - (0 + 30 \cdot 14,5 \cdot 3) - (0 + 3 \cdot 1,5 \cdot 18,5) -$$

$$- (0 + 24 \cdot 7 \cdot 17,5) \approx 21\,747 \text{ dm}^4$$

La matriu d'inèrcia en el centre de gravetat del panell es pot calcular a partir del teorema de Steiner:

$$I_{x_G} = 30\,111 - 261 \cdot 9,58^2 \approx 6\,157 \text{ dm}^4$$

$$I_{y_G} = 23\,391 - 261 \cdot 8,14^2 \approx 6\,097 \text{ dm}^4$$

$$P_{x_G y_G} = 21\,747 - 261 \cdot 8,14 \cdot 9,58 \approx 1\,394 \text{ dm}^4$$

Finalment, la matriu d'inèrcia del panell en el punt A serà:

$$I_{x_A} = 6\,157 + 261 \cdot 8,42^2 \approx 24\,661 \text{ dm}^4$$

$$I_{y_A} = I_y \approx 23\,391 \text{ dm}^4$$

$$P_{x_A y_A} = 1\,394 + 261 \cdot 8,14 \cdot (-8,42) \approx -16\,495 \text{ dm}^4$$

Tenint en compte que l'angle que forma el cable A amb la direcció horitzontal AX és de 120° , el moment d'inèrcia respecte de l'eix que coincideix amb el cable A s'obtingria a partir de l'expressió següent:

$$I_{V_A} = 24\,661 \cdot \cos^2 120^\circ - (-16\,495) \cdot \sin 240^\circ + 23\,391 \cdot \sin^2 120^\circ \approx 9\,423 \text{ dm}^4$$

Exercici 1.30 En la figura 1.30 de la pàgina 25 es mostra la planta i secció d'una llosa de formigó la densitat de la qual és 2500 kg/m^3 , proveïda de quatre orificis circulars de 40 cm de diàmetre. En la part esquerra es mostra la llosa recolzada sobre un talús, on la zona més estreta vola sobre aquest una distància L . Es demana:

1. El valor màxim de L perquè la llosa no bolque.
2. El valor dels moments d'inèrcia i els eixos principals centrals de la figura que representa la planta de la llosa.

Per a poder resoldre el primer apartat, es col·loca la llosa amb els eixos de la figura 1.74 de manera que s'haurà de verificar que el centre de gravetat d'aquesta estarà en l'origen de coordenades, perquè el pes (massa) de la part esquerra equilibra a la part dreta (punt de bolcament A).

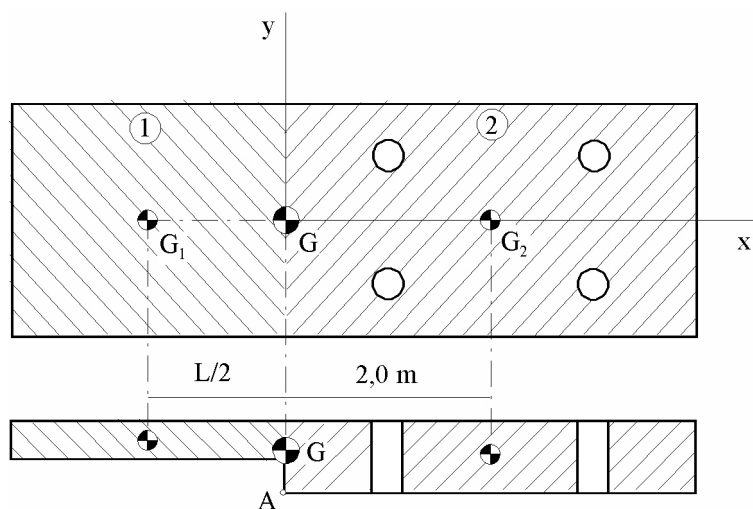


Figura 1.74: Il·lustració de la llosa de formigó de l'exercici 1.30

Els pesos i punts d'aplicació són:

$$P_1 = V_1 \cdot \rho = 2,25 \cdot L \cdot 0,35 \cdot 2500 = 1970 \cdot L \text{ kp}; \quad G_1 \left(-\frac{L}{2}, 0 \right) \text{ m}$$

$$P_2 = V_2 \cdot \rho = [4 \cdot 2,25 \cdot 0,7 - 4 \cdot (\pi \cdot 0,2^2 \cdot 0,70)] \cdot 2500 = 14900 \text{ kp}; \quad G_2(2,0) \text{ m}$$

Aplicant la condició d'equilibri de moments dels pesos o que la coordenada x del centre de gravetat es nul·la, la **longitud màxima** perquè la llosa de formigó no bolque és:

$$x_G = 0 \longrightarrow 1970 \cdot L \cdot \left(-\frac{L}{2} \right) + 14900 \cdot 2 = 0 \longrightarrow L = 5,50 \text{ m}.$$

Tenint en compte la figura 1.75, la planta de la llosa es prendrà com:

- Rectangle de costats $9,5 \text{ m}$ i $2,25 \text{ m}$, àrea de $21,4 \text{ m}^2$ i $G(4,75;0)$.
- Quatre orificis de superfície $0,126 \text{ m}^2$ (A, B, C, i D), i els centres de gravetat que s'indiquen en la figura 1.75.

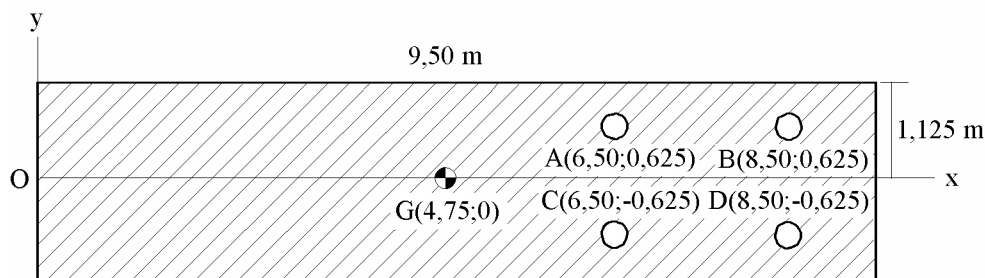


Figura 1.75: Secció de la llosa de formigó de l'exercici 1.30 per al càlcul del centre de gravetat i dels moments d'inèrcia

$$x_G = \frac{21,4 \cdot 4,75 - 2 \cdot 0,126 \cdot 6,50 - 2 \cdot 0,126 \cdot 8,50}{21,4 - 4 \cdot 0,126} \approx 4,68 \text{ m}.$$

Aplicant les expressions dels moments d'inèrcia corresponents a la geometria implicada en la llosa i el teorema de Steiner quan calga, la matriu d'inèrcia seria:

$$I_x = \sum_{i=1}^5 I_{x_i} = \frac{9,50 \cdot 2,25^3}{12} - 4 \cdot \left(\frac{\pi \cdot 0,20^4}{4} + 0,126 \cdot 0,625^2 \right) \approx 8,82 \text{ m}^4$$

$$I_y = \sum_{i=1}^5 I_{y_i} = \frac{2,25 \cdot 9,50^3}{3} - 2 \cdot \left(\frac{\pi \cdot 0,20^4}{4} + 0,126 \cdot 6,50^2 \right) -$$

$$- 2 \cdot \left(\frac{\pi \cdot 0,20^4}{4} + 0,126 \cdot 8,50^2 \right) \approx 614,2 \text{ m}^4$$

Mentre que el producte d'inèrcia és nul aplicant la propietat que diu que el parell d'eixos format per un eix de simetria i un altre ortogonal a aquest, són eixos conjugats: $P_{xy} = 0$. A partir d'aquí es pot calcular **la matriu d'inèrcia principal central**:

$$I_{x_G} \equiv I_x \equiv I_{y_{0_G}} = 8,82 \text{ m}^4$$

$$I_{y_G} = I_y - S_T \cdot x_G^2 = 614,2 - 20,9 \cdot 4,68^2 = 156,4 \text{ m}^4 \equiv I_{x_{0_G}}$$

Per tant, **les direccions principals d'inèrcia** formen un angle de -90° respecte de l'eix OX de la figura 1.75.

Exercici 1.31 La grua de la torre de la figura 1.31 té un contrapès (situat en A) de valor 31 kN; el motor M pesa 4,5 kN; la ploma AG de la grua pesa 36 kN, podent-se considerar aplicada aquesta força en el punt G; finalment, el pes de la torre és de 23 kN, i es considera aplicat en el seu punt mitjà.

1. Si la torre està alçant una càrrega de 9 kN, calculeu i representeu les forces de reacció en els recolzaments D i E en funció de la distància x a la qual s'alça la càrrega.
2. S'estipula que les forces de reacció en D i E no poden ser menors de 4,5 kN, per a evitar el bolcament de la grua, mantenint a més un cert marge de seguretat. Tenint en compte açò, es demana representar la càrrega màxima que pot alçar la grua, $Q_{màx}$, en funció de la distància x ($5 \leq x \leq 35$ m).

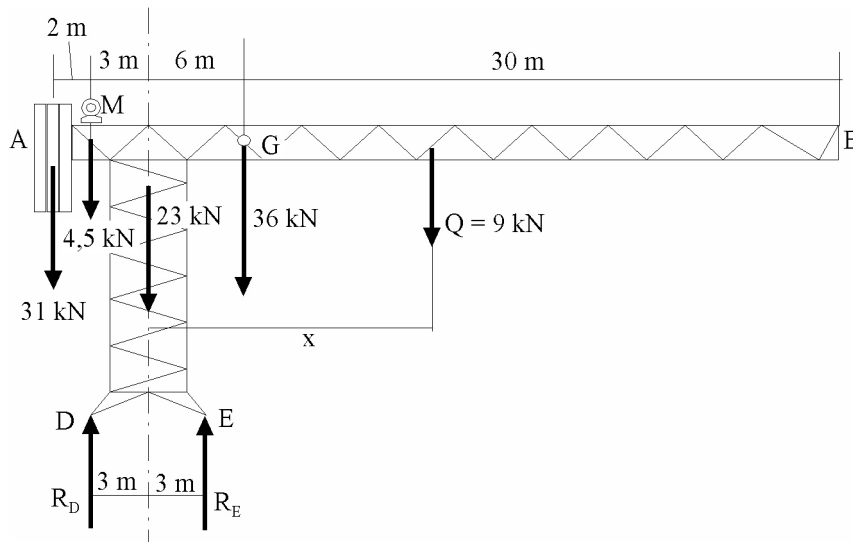


Figura 1.76: Diagrama de sòlid lliure de la grua de l'exercici 1.31

Com que totes les forces que actuen són verticals, les equacions de l'equilibri es redueix a la $\sum F_i = 0$ i $\sum M_{i_D} = 0$. Atesa la figura 1.76 s'obté que:

$$-31 - 4,5 - 23 - 36 - 9 + R_D + R_E = 0 \rightarrow R_D + R_E = 103,5 \text{ kN}$$

$$31 \cdot 2 - 23 \cdot 3 + R_E \cdot 6 - 36 \cdot 9 - 9 \cdot (x + 3) \rightarrow 6 \cdot R_E - 358 + 9 \cdot x = 0$$

Les funcions de les forces de reacció en els suports en funció de la distància x són:

$$R_E = 1,5 \cdot x + 59,7 \quad \forall x \geq 3 \text{ m}$$

$$R_D = -1,5 \cdot x + 43,8 \quad \forall x \geq 3 \text{ m}$$

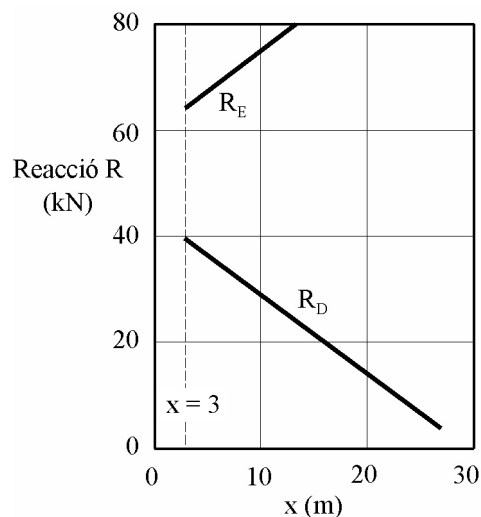


Figura 1.77: Representació gràfica dels valors de les reaccions en funció de la distància de l'exercici 1.31

La representació gràfica d'aquestes funcions es dona en la figura 1.77. El màxim valor de la distància x s'obté quan $R_D = 0$, és a dir, per a $x = 29,2 \text{ m}$.

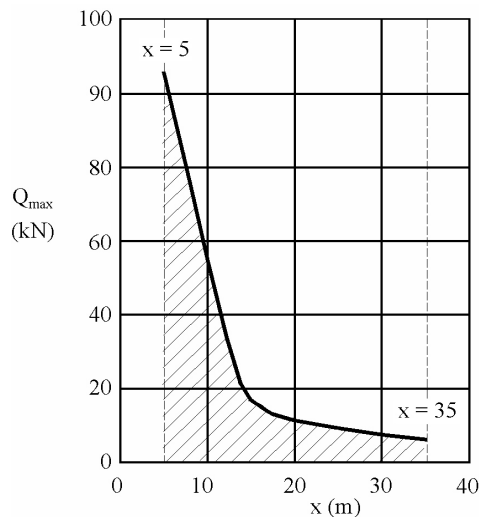


Figura 1.78: Representació gràfica dels valors de la càrrega màxima en funció de la distància de l'exercici 1.31

En el segon apartat s'ha de resoldre una situació pràctica i habitual en l'edificació. Es tracta d'analitzar les reaccions en els suports en funció de la distància de la càrrega màxima que pot alçar la grua. Per tant, aplicant les condicions que han de complir les reaccions per a evitar el bolcament, les condicions de l'equilibri s'expressarien com:

$$R_D + R_E = 94,5 + Q_{màx} \text{ kN}$$

$$\sum M_{i_E} = 0 = 31 \cdot 8 - R_E \cdot 6 + 4,5 \cdot 6 + 23 \cdot 3 - 36 \cdot 3 - Q_{màx} \cdot (x + 3)$$

$$6 \cdot R_E = 236 - Q_{màx} \cdot (x + 3) \longrightarrow R_D = 39,3 - \frac{Q_{màx} \cdot (x + 3)}{6} \geq 4,5$$

$$Q_{màx} \cdot (x + 3) \leq 209 \longrightarrow Q_{màx} \leq \frac{209}{x + 3}; \quad 5 \leq x \leq 35 \text{ m}$$

La representació gràfica es troba en la figura 1.78, on la zona ratllada correspon a tots els parells de valors $(x, Q_{màx})$ que compleixen les condicions demanades en aquest apartat.

Esforços en elements estructurals: Estructures articulades planes

2.1 Introducció teòrica i objectius

En aquest bloc temàtic es tracta que l'alumnat aprenga el comportament dels cossos sòlids sotmesos a l'acció d'un sistema de forces exteriors i que ofereixen una resposta elàstica, és a dir, que són capaços de recuperar completament les dimensions originals quan se suprimeixen les forces aplicades. Aquesta recuperació es deguda a l'acció de les forces internes que apareixen en el sòlid per efecte de les exteriors. L'aproximació en l'estudi de les estructures està limitat a no considerar situacions límit (pertany al camp de la **resistència de materials**) ni tenir en compte les relacions globals en el comportament real d'un conjunt tridimensional de cossos sòlids que poden deformar-se contínuament i arbitràriament (pertany al camp de la **teoria d'estructures**).

S'observa que els cossos, sota l'acció de forces exteriors, es deformen. Aquesta deformació, en general, serà petita comparada amb les dimensions pròpies del cos, cosa que permet suposar que durant la deformació no canviaran les posicions relatives de les forces actuant respecte del cos. Per tant, es podran aplicar les condicions d'equilibri que s'han utilitzat en el capítol anterior.

El problema principal de l'elasticitat és determinar el sistema de forces que s'originen a l'interior d'un cos, per a equilibrar l'acció de les forces aplicades exteriorment. En aquest sentit, serà necessari l'obtenció del **diagrama de sòlid lliure** i l'aplicació del **mètode de les seccions** que pot enunciar-se com "*tota secció d'un cos en equilibri es troba també en equilibri*". Dins l'àmbit de les construccions arquitectòniques, apareixen els anomenats **entramats articulats plans**, que són formats per barres coplanàries unides entre si per articulacions. Els ponts, les encavallades, les bigues, les grues i altres estructures semblants són un exemple corrent d'entramats.

Els principals objectius que s'hauran d'adquirir en aquest bloc temàtic són:

- Saber interpretar la corba **tensió-deformació**.
- Saber la **lleï de Hooke** i els límits de la seua aplicació.
- Saber calcular les deformacions axials i laterals utilitzant el **mòdul de Young** i el **coeficient de Poisson**.

- Saber calcular les reaccions en els suports d'estructures articulades planes.
- Saber aplicar els mètodes analítics i gràfics de resolució per a obtenir els esforços interns en les barres de les estructures.
- Saber obtenir els esforços interns en cables.

Per a assolir els objectius esmentats anteriorment caldrà aplicar els coneixements previs associats als blocs de sistemes de vectors lliscants paral·lels i geometria de masses. L'estudi de l'elasticitat i els entramats articulats plans està justificat per l'íntima relació que hi ha com a elements constructius en l'enginyeria d'edificació, en particular. La base d'aquest bloc s'haurà d'aplicar en altres assignatures del grau com **Fonaments Físics de les Instal·lacions** (fonamentalment, en la mecànica de fluids), **Construccions d'Estructures I i II** o **Càlcul d'Estructures I**.

2.2 Referències bibliogràfiques

L'estudi teòric estarà relacionat amb els coneixements previs de l'alumnat. Aquest capítol es pot preparar llegint els capítols 10 i 11 de [6], els 5 i 6 de [1] i de [15] i els 7 i 8 [12]. També és recomanable la consulta dels llibres [8] i [17]. Generalment, els llibres de física no desenvolupen amb detall o, fins i tot, no apareix cap capítol dedicat a aquest bloc temàtic. Tanmateix, en el capítol 12 de [16] o en el capítol 9 de [7] es poden trobar exercicis d'estàtica aplicades a estructures. És interessant la lectura dels articles [2] i [3]. Aquest capítol també es pot consultar tant en el bloc <http://blogs.ua.es/jjrr2011> com per l'OpenCourseWare de la Universitat d'Alacant.

2.3 Exercicis tipus qüestió

Depenent de la dificultat que trobe l'alumnat a l'hora de resoldre'ls, poden interpretar-se com problemes curts. El temps dedicat a resoldre cada qüestió no hauria de superar els trenta minuts en cap cas. Normalment, es tracta d'aplicar alguna llei concreta, un concepte teòric que permet arribar a la solució ràpidament o l'aplicació de fonaments matemàtics que s'haurien de saber.

Exercici 2.1: *En l'estructura articulada que es mostra en la figura 2.1, el punt B es desplaça 5 cm cap avall. Determineu:*

1. *Les deformacions unitàries longitudinals en les barres AB i BC.*
2. *Els esforços en cadascuna de les dues barres. Doneu el resultat en Pa (N/m^2). Les barres són d'acer i el seu mòdul de Young és $E_{acer} = 2,1 \times 10^6 \text{ kp/cm}^2$.*

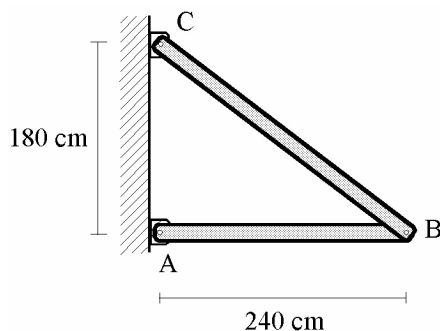


Figura 2.1: Estructura articulada de l'exercici 2.1

Observació 2.1: Recordeu la relació entre la deformació unitària i el mòdul de Young, així com la llei de Hooke.

SOLUCIÓ: 1. $\epsilon_{AB} = 2,08 \cdot 10^{-4}$ i $\epsilon_{BC} = 101 \cdot 10^{-4}$.

2. $\sigma_{AB} = 42,8 \cdot 10^6$ Pa i $\sigma_{BC} = 2,08 \cdot 10^9$ Pa

□

Exercici 2.2: En la construcció d'un edifici s'utilitza un cable d'acer de 6 mm de diàmetre per a l'elevació de materials. Si pengen verticalment 150 m de cable, per a elevar en l'extrem inferior una càrrega de 200 kp, determineu l'allargament total del cable. El pes específic de l'acer és de $0,0078 \text{ kp/cm}^3$ i el seu mòdul de Young val $2,1 \times 10^6 \text{ kp/cm}^2$.

Observació 2.2: Per a plantejar aquest exercici es recomana la revisió de l'exercici resolt 10.2R, en la pàgina 298 de [13], on es dedueix l'expressió de l'augment total de longitud d'una barra recta penjada verticalment i sotmesa només al seu propi pes.

SOLUCIÓ: 5,47 cm

□

Exercici 2.3: Les barres del cavall de la figura 2.2 no poden suportar càrregues de tracció superiors a 80 kN, ni càrregues de compressió superiors a 50 kN. Calculeu el valor màxim de la càrrega P que pot suportar l'estructura.

Observació 2.3: Atesa la simetria del cavall, és trivial deduir les reaccions en els suports. També es pot saber quines barres no treballen.

SOLUCIÓ: La càrrega màxima que es pot col·locar és de 50 kN

□

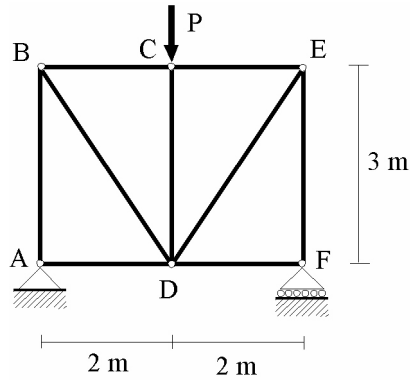


Figura 2.2: Estructura articulada de l'exercici 2.3

Exercici 2.4: Una barra quadrada d'alumini, de 5 cm de costat i 25 cm de longitud, està sotmesa a càrregues axials de tracció en els extrems. S'ha observat experimentalment que la deformació unitària en la direcció de la càrrega és 0,001. Determineu el volum de la barra quan actua la càrrega. Supposeu que el mòdul de Poisson del material és 0,33.

Observació 2.4: Recordeu que la variació del volum d'una peça sotmesa a una tracció/compressió està relacionada amb el coeficient de Poisson. Consulteu la pàgina 282 de [13] on s'explica la deformació transversal d'una peça prismàtica sotmesa a tracció-compressió.

SOLUCIÓ: $V = 625,2125 \text{ cm}^3$

□

Exercici 2.5: És usual, per facilitar constructiva i per satisfer unes característiques mínimes de resistència, construir estructures, com la de la figura 2.3, utilitzant pocs elements (barres) distints (en aquest cas només 3). Per a dimensionar l'estructura, n'hi ha prou de determinar el màxim valor de l'esforç de compressió en les barres horitzontals de la part de dalt (que té lloc en les barres HJ o JL); la màxima tracció en les horitzontals de baix (barres GI o IK); la tensió de la barra diagonal que més treballa (barres BC o RO), i la màxima tensió sobre les barres verticals (AB o QR). Es demana:

1. Determineu les tensions en les barres HJ, GI, BC i AB. Es recomana utilitzar el mètode de seccions.
2. Si la secció de les barres és igual a 10 cm^2 , es demana determinar l'esforç que apareix en la barra que més treballa de l'estructura, i també la deformació (unitària i absoluta) d'aquesta barra, sabent que està feta d'acer, el mòdul de Young de la qual val $2 \times 10^6 \text{ kp/cm}^2$.

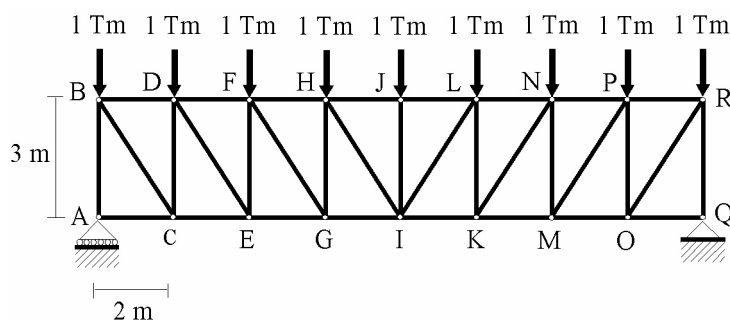


Figura 2.3: Estructura articulada de l'exercici 2.5

Observació 2.5: Aproveiteu la simetria de l'estructura i de les càrregues per a obtenir les reaccions en els suports sense resoldre equacions. Apliqueu el mètode de Ritter per a la resolució de l'exercici.

SOLUCIÓ: 1. $T_{AB} = 4,50 \text{ Tm (C)}$; $T_{HJ} = 5,33 \text{ Tm (C)}$; $T_{GI} = 5,00 \text{ Tm (T)}$; $T_{BC} = 4,21 \text{ Tm (T)}$.
 2. $\sigma_{HJ} = 533 \text{ kp/cm}^2$; $\epsilon = 2,67 \cdot 10^{-4}$; $\Delta L = 0,533 \text{ mm}$ □

Si encara no heu aconseguit resoldre-les, preneu nota de totes les dificultats i aprofiteu tots els recursos disponibles al vostre abast en la Universitat. La resolució d'aquestes qüestions es pot trobar en la secció 2.6 amb tots els passos detallats. **Recordeu que és possible fer els exercicis correctament i arribar a una solució lleugerament diferent com a conseqüència del truncament numèric decimal.**

2.4 Exercicis tipus examen

En aquest apartat hem seleccionat un conjunt dels exercicis proposats en els exàmens durant els últims vint anys. S'ha organitzat de forma que la dificultat de resolució siga creixent. Poden interpretar-se com problemes llargs, encara que la seua durada no hauria de ser superior a l'hora (quaranta-cinc minuts és un temps raonable i 30 minuts hauria de ser l'objectiu final per a resoldre aquest tipus d'exercici). Convé rellegir l'apèndix A abans de començar a resoldre els exercicis d'aquesta secció i tenir a prop les taules de centres de gravetat i moments d'inèrcia (per exemple, l'apèndix A de [6]) per al cas de tenir càrregues distribuïdes actuant sobre l'estructura.

Exercici 2.6: La part superior d'una columna troncocònica té una secció de 4 cm^2 i la base de 16 cm^2 (figura 2.4). Si el mòdul de Young del material val $7 \times 10^9 \text{ kp/m}^2$, calculeu la càrrega que actua sobre la columna si la longitud d'aquesta disminueix en $0,1 \text{ mm}$.

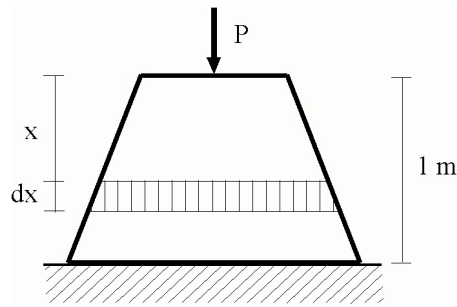


Figura 2.4: Secció de la columna troncocònica de l'exercici 2.6

Observació 2.6: Per a resoldre aquest exercici cal aplicar propietats geomètriques i càlcul diferencial i integral.

SOLUCIÓ: 5 488 N

□

Exercici 2.7: Atesa l'estructura en pòrtic de la figura 2.5, es demana determinar: 1) Reaccions en els suports. 2) Esforços en les barres. Doneu el valor i el tipus d'esforç, usant el mètode de Cremona. 3) Amb el mètode de seccions determineu l'esforç en la barra n-o. En la figura 2.5 s'indiquen les zones de la notació de Bow.

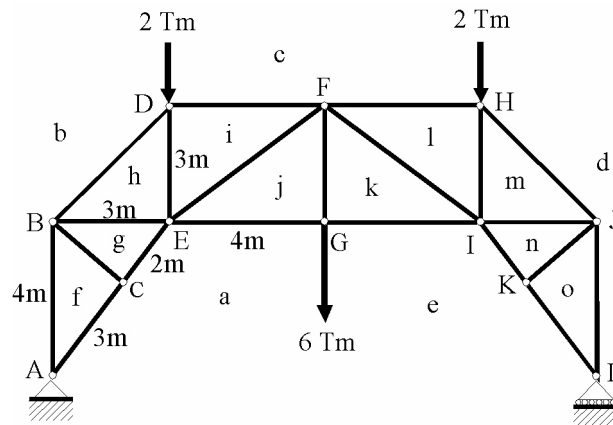


Figura 2.5: Estructura en pòrtic de l'exercici 2.7

Observació 2.7: Per a entendre el procediment gràfic del diagrama de Maxwell-Cremona i el mètode de Ritter o de seccions podeu llegir les pàgines 319-322 i 324, respectivament, del llibre [13].

SOLUCIÓ: 1. $R_{Ay} = R_{Ly} = 5 \text{ Tm}$.

2. Diagrama a la pàgina 103.

3. $T_{no} = 0 \text{ Tm}$

□

Exercici 2.8: L'estructura de la figura 2.6 té un suport de passador en A i un rodet en F. Es demana: 1) Les reaccions en els suports. 2) Esforços en les barres, valor i tipus. Es valorarà la utilització del diagrama de Maxwell-Cremona.

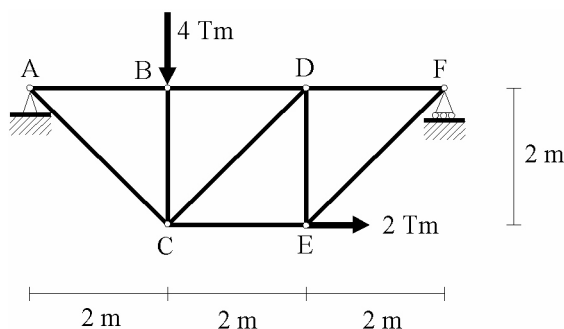


Figura 2.6: Estructura de l'exercici 2.8

Observació 2.8: Es deixa el mètode analític perquè comproveu la solució gràfica obtinguda pel mètode de Maxwell-Cremona (també en els exercicis 2.9, 2.10, 2.11, 2.12, 2.13, 2.14, 2.19, 2.20, 2.23, 2.24 2.25 i 2.26).

SOLUCIÓ: 1. $R_{Ax} = -2,00 \text{ Tm}$; $R_{Ay} = 3,33 \text{ Tm}$; $R_{Fy} = 0,667 \text{ Tm}$.

2. Diagrama a la pàgina 104

□

Exercici 2.9: L'entramat articulat de la figura 2.7 té un suport fix en el punt A i un altre de mòbil o de corrons en el punt F. Es demana: 1) Reaccions en els suports. 2) Esforços en les barres (valor i tipus).

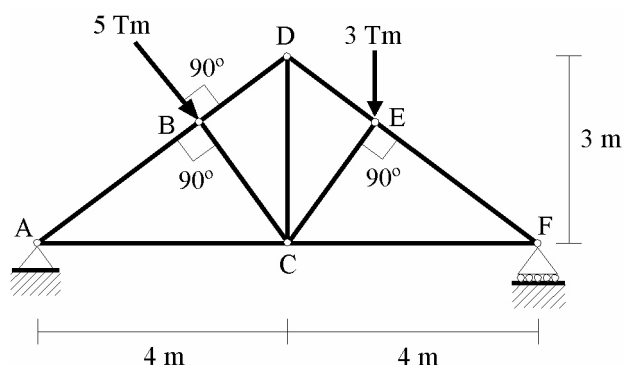


Figura 2.7: Entramat articulat de l'exercici 2.9

Observació 2.9: Heu de recordar les definicions de les raons trigonomètriques sinus i cosinus. També podeu aplicar el teorema de Pitàgores i definir altres triangles rectangles per a calcular distàncies.

SOLUCIÓ: 1. $R_{Ax} = -3,00 \text{ Tm}$; $R_{Ay} = 2,96 \text{ Tm}$; $R_{Fy} = 4,04 \text{ Tm}$.

2. Diagrama a la pàgina 106

□

Exercici 2.10: La figura 2.8 mostra una estructura articulada plana destinada a suportar el pes de 20 000 kp situada a l'extrem d'aquesta. Calculeu: 1) Les reaccions en els suports. 2) Esforços en les barres, valor i tipus.

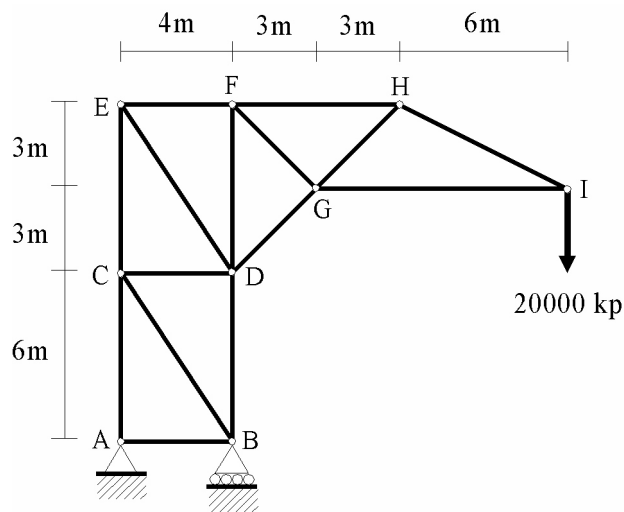


Figura 2.8: Estructura articulada plana de l'exercici 2.10

SOLUCIÓ: 1. $R_{Ax} = 0 \text{ kp}$; $R_{Ay} = 80\,000 \text{ kp}$; $R_{Hy} = -60\,000 \text{ kp}$.

2. Diagrama a la pàgina 108

□

Exercici 2.11: La figura 2.9 mostra una estructura en volada destinada a suportar una bastida com la que mostra aquest exercici. L'estructura té un recolzament fix en el punt D i està subjectada per un cable unit al punt C. Les dimensions i els angles que formen les barres de l'estructura s'indiquen en la mateixa figura. El pes de la bastida és de 600 kp. Es demana:

1. La força de reacció en el punt D i la força de tensió en el cable.

2. Esforços en cadascuna de les barres (valor i tipus).

SOLUCIÓ: 1. $T_{Dx} = -2\,460 \text{ kp}$; $T_{Dy} = 2\,020 \text{ kp}$; $T_C = 2\,840 \text{ kp}$.

2. Diagrama a la pàgina 109

□

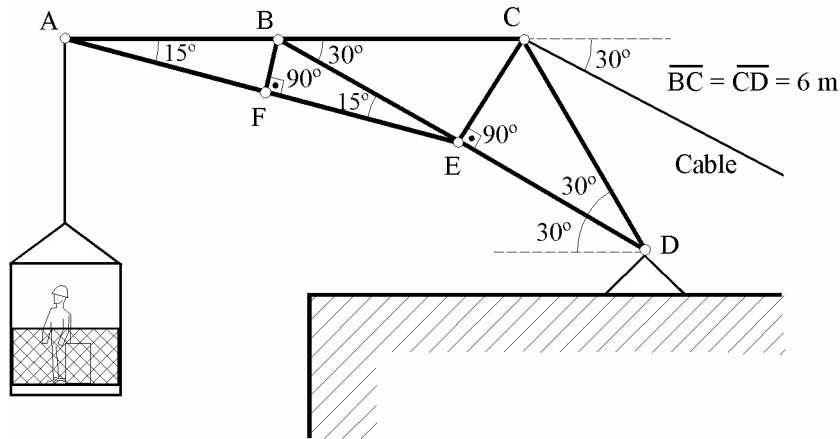


Figura 2.9: Estructura en volada de l'exercici 2.11

Exercici 2.12: Atesa l'estructura reticulada plana de la figura 2.10, es demana: 1) Reaccions en els suports. 2) Esforços en les barres (valor i tipus).

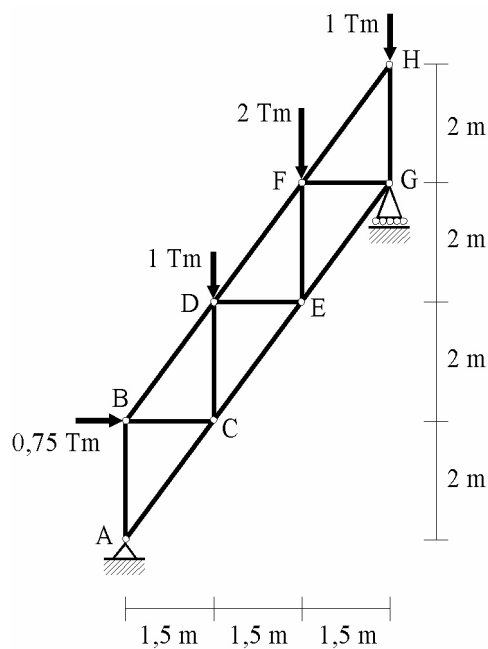


Figura 2.10: Estructura reticulada plana de l'exercici 2.12

SOLUCIÓ: 1. $R_{Ax} = -0,75 \text{ Tm}$; $R_{Ay} = 1,00 \text{ Tm}$; $R_{Gy} = 3,00 \text{ Tm}$.
2. Diagrama a la pàgina 111

□

Exercici 2.13: La figura 2.11 mostra l'armadura d'una escala d'acer. Es demana: 1) Forces d'enllaç exteriors. 2) Esforços en les barres indicant el valor i

tipus. 3) Quina hauria de ser la secció de les barres, expressades en cm^2 , perquè en cap cas l'esforç transmés a través de qualsevol d'aquestes fóra superior a $200\,000\text{ Pa}$?

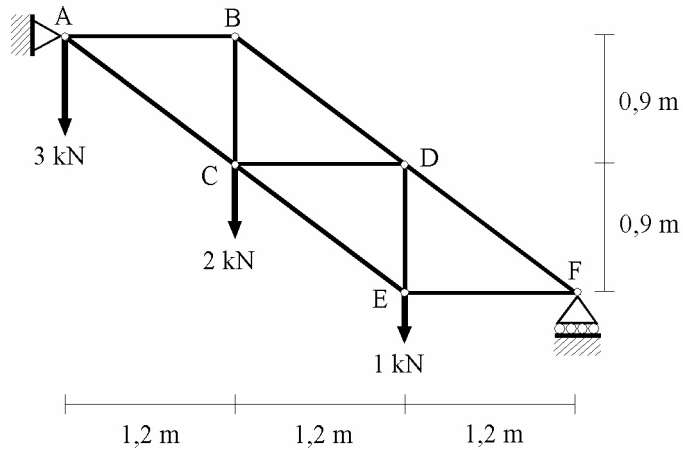


Figura 2.11: Armadura de l'escala d'acer de l'exercici 2.13

- SOLUCIÓ: 1. $R_{Ax} = 0\text{ kN}$; $R_{Ay} = 4,67\text{ kN}$; $R_{Fy} = 1,33\text{ kN}$.
 2. Diagrama a la pàgina 113.
 3. $S = 140\text{ cm}^2$

□

Exercici 2.14: Una càmera de televisió es pot moure sobre un carril continu (densitat lineal = 50 kp/m) que està recolzat sobre els nusos A, C, D i E de l'estructura en volada de la figura 2.12. L'estructura té un suport fix en A i un altre de corrons en B. El pes de la càmera és de 100 kp i es troba situada en l'extrem del carril. Es demana: 1) Reaccions en els suports. 2) Esforços en les barres (valor i tipus).

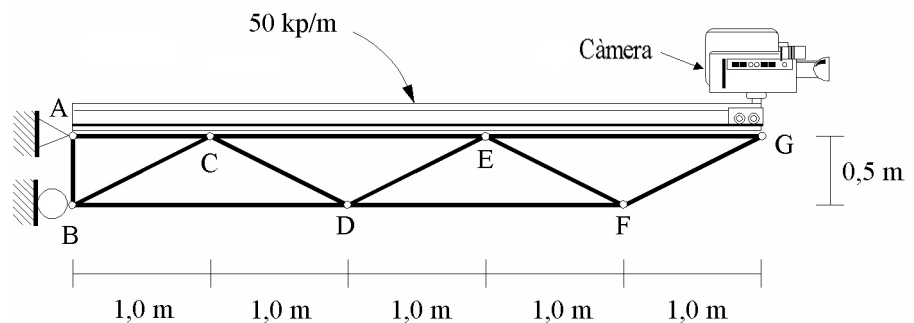


Figura 2.12: Estructura en volada amb la càmera de televisió de l'exercici 2.14

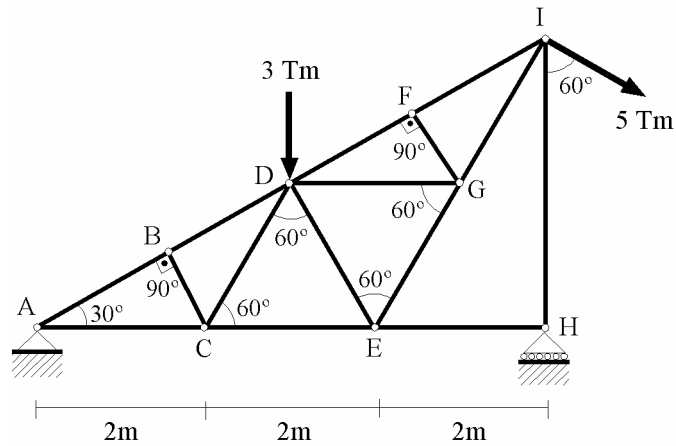


Figura 2.14: Estructura i càrregues aplicades de l'exercici 2.16

SOLUCIÓ: 1. $R_{Ax} = 4,33 \text{ Tm}$; $R_{Ay} = 1,00 \text{ Tm}$; $R_{Hy} = 6,50 \text{ Tm}$.
 2. $T_{AD} = 2,00 \text{ Tm (T)}$; $T_{AE} = 2,60 \text{ Tm (T)}$; $T_{DE} = 2,60 \text{ Tm (C)}$; $T_{DI} = 3,50 \text{ Tm (T)}$; $T_{EI} = 2,60 \text{ Tm (T)}$; la resta de barres, no treballen. Diagrama a la pàgina 119 \square

Exercici 2.17: Atés el cavall de la figura 2.15, es demana: 1) Reaccions en els suports. 2) Esforços en les barres, analíticament. 3) Diagrama de Maxwell-Cremona.

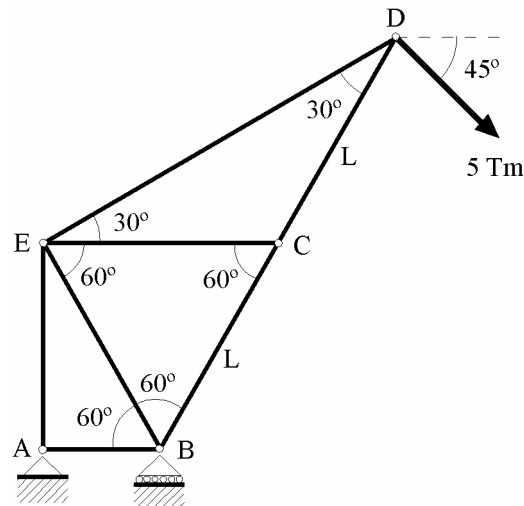


Figura 2.15: Cavall i càrregues aplicades de l'exercici 2.17

Observació 2.13: És equivalent a l'exercici 2.16.

SOLUCIÓ: 1. $R_{Ax} = -3,54 \text{ Tm}$; $R_{Ay} = -19,32 \text{ Tm}$; $R_{By} = 22,90 \text{ Tm}$.
 2. $T_{AB} = 3,50 \text{ Tm (T)}$; $T_{AE} = 19,32 \text{ Tm (T)}$; $T_{DE} = 9,50 \text{ Tm (T)}$; $T_{BD} =$

9, 50 Tm (C); $T_{BE} = 16, 40$ Tm (T); la barra EC no treballa.

3. Diagrama a la pàgina 122

□

Exercici 2.18: Atesa l'estructura de la figura 2.16, es demana: 1) Reaccions en els suports. 2) Esforços en les barres. Resoleu aquest apartat analíticament i pel diagrama de Maxwell-Cremona.

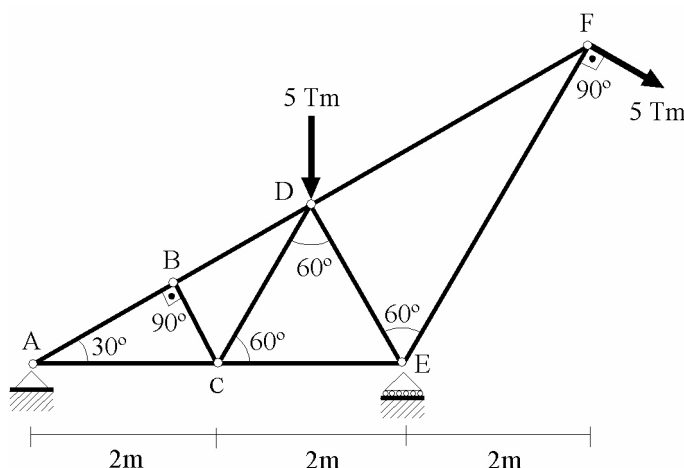


Figura 2.16: Estructura i càrregues aplicades de l'exercici 2.18

Observació 2.14: És equivalent als exercicis 2.16 i 2.17.

SOLUCIÓ: 1. $R_{Ax} = -4, 33$ Tm; $R_{Ay} = -3, 75$ Tm; $R_{Ey} = 11, 25$ Tm.

2. $T_{AD} = 7, 50$ Tm (T); $T_{AE} = 2, 17$ Tm (C); $T_{DE} = 4, 33$ Tm (C); $T_{EF} = 8, 67$ Tm (C); $T_{DF} = 10, 0$ Tm (T); les barres BC i CD no treballen. Diagrama a la pàgina 124

□

Exercici 2.19: La figura 2.17 mostra un entramat en volada amb dos suports. Les càrregues corresponen al pes de la coberta. Es demana: 1) Reaccions en els suports. 2) Esforços en les barres (valor i tipus).

SOLUCIÓ: 1. $R_{Ax} = 0$ kN; $R_{Ay} = 16$ kN; $R_{By} = 32$ kN.

2. Diagrama a la pàgina 126

□

Exercici 2.20: Atesa l'estructura articulada plana de la figura 2.18, es demana: 1) Reaccions en els suports. 2) Esforços en les barres (valor i tipus). És recomanable l'ús del mètode de Cremona.

SOLUCIÓ: 1. $R_{Ax} = 0$ Tm; $R_{Ay} = 10$ Tm; $R_{Jy} = 5$ Tm.

2. Diagrama a la pàgina 128

□

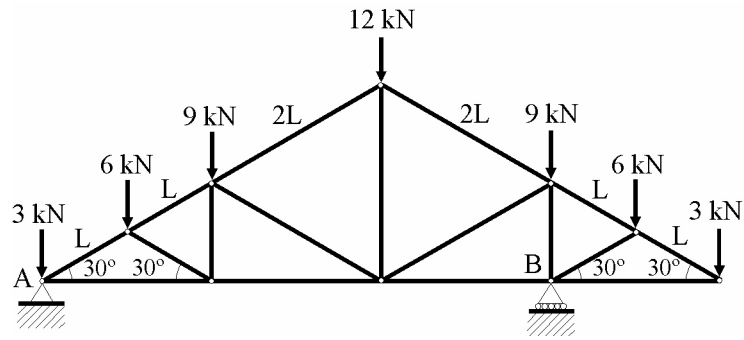


Figura 2.17: Entramat en volada i càrregues exteriors de l'exercici 2.19

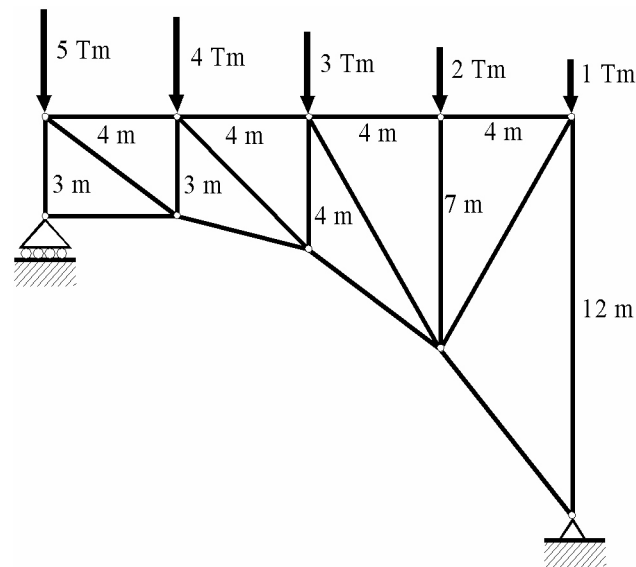


Figura 2.18: Estructura articulada plana i càrregues exteriors de l'exercici 2.20

Exercici 2.21: En la figura 2.19 es mostra de forma esquematitzada, la ploma d'una grua tipus derrick. El suport en A és fix i sobre el nus B actua un cable amb una tensió T . La càrrega Q , que actua sobre el nus I, val 35 Tm . Es demana: 1) Reacció en A i tensió T en el cable. 2) Esforços en les barres (tipus i magnituds) utilitzant el Diagrama de Maxwell-Cremona.

Observació 2.15: Fixeu-vos molt bé en els angles que fan les barres en la ploma de la grua tipus derrick. Heu de deduir l'angle que forma la tensió T amb l'horitzontal.

SOLUCIÓ: 1. $R_{Ax} = 80,9 \text{ Tm}$; $R_{Ay} = 13,31 \text{ Tm}$; $T = 83,8 \text{ Tm}$.
2. Diagrama a la pàgina 130

□

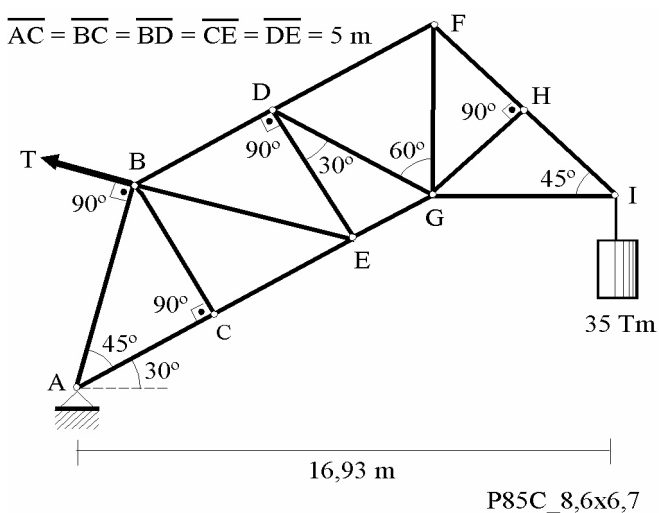


Figura 2.19: Ploma d'una gruà tipus derrick i càrregues exteriors de l'exercici 2.21

Exercici 2.22: En la figura 2.20 es mostra una estructura plana destinada a suportar tres campanes d'un carilló els pesos de les quals són $C_1 = 1000 \text{ kp}$; $C_2 = 600 \text{ kp}$ i $C_3 = 400 \text{ kp}$. Cada campana es troba unida al nus que s'indica. Es demana:

1. Reaccions en els suports.
2. Esforços en les barres (valor i tipus). Resoleu-ho analíticament i gràficament.
3. Valor de la deformació màxima, indicant en quina barra té lloc, si la secció de les barres és de 5 cm^2 i el material té un mòdul de Young de $2 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$.

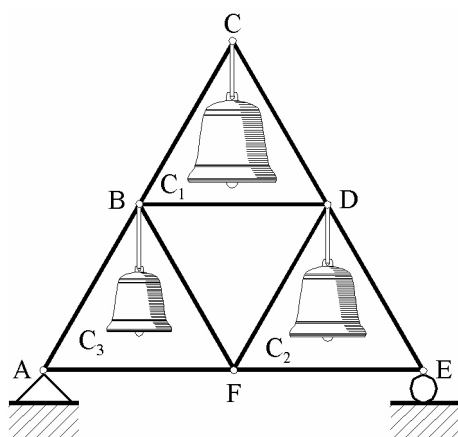


Figura 2.20: Estructura plana on es col·loquen les campanes de l'exercici 2.22

Observació 2.16: Cal aplicar les condicions d'equilibri i els mètodes dels nusos i de Maxwell-Cremona per a la resolució d'aquest exercici. També s'ha de recordar la relació entre la deformació unitària, l'esforç i el mòdul de Young.

SOLUCIÓ: 1. $R_A = 950 \text{ kp}$; $R_B = 1\,050 \text{ kp}$.

2. $T_1 = 548,5 \text{ kp (T)}$; $T_2 = 1\,097 \text{ kp (C)}$; $T_3 = 577,4 \text{ kp (C)}$; $T_4 = 288,7 \text{ kp (C)}$; $T_5 = 57,7 \text{ kp (T)}$; $T_6 = 57,7 \text{ kp (C)}$; $T_7 = 606,2 \text{ kp (T)}$; $T_8 = 1\,212 \text{ kp (C)}$. Diagrama a la pàgina 133.

3. $\epsilon_{m\grave{a}x} \approx 1,12 \times 10^{-4}$ □

Exercici 2.23: La figura 2.21 mostra una armadura d'estisores, utilitzada per a suportar una teulada a dues aigües. Calculeu: 1) Reaccions en els suports. 2) Tensions en les barres (valor i tipus). 3) Si la secció de les barres és de 10 cm^2 i estan fetes de ferro (mòdul de Young $E = 2 \times 10^{11} \text{ Pa}$), es demana en quina barra és l'esforç màxim i en quina és mínim.

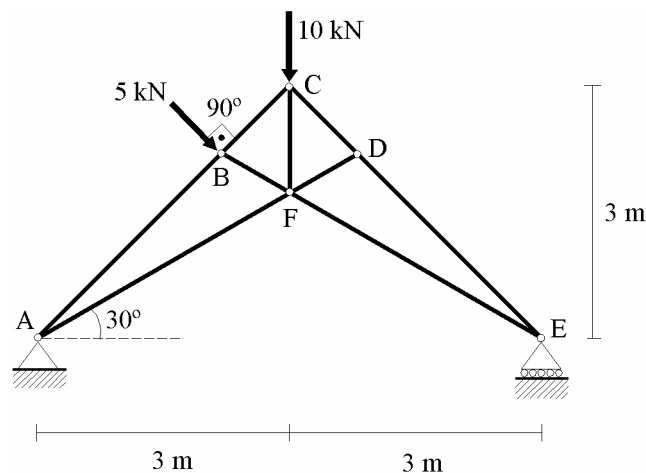


Figura 2.21: Armadura d'estisores i càrregues exteriors de l'exercici 2.23

Observació 2.17: Per al càlcul del moment de les forces, cal deduir les distàncies i necessitareu un sistema de dues equacions per a calcular-les.

SOLUCIÓ: 1. $R_{Ax} = -3,54 \text{ kN}$; $R_{Ay} = 5,95 \text{ kN}$; $R_{Ey} = 7,59 \text{ kN}$.

2. Diagrama a la pàgina 136.

3. La barra AB treballa amb l'esforç màxim de $26,0 \text{ kN}$ a compressió, i la barra BE treballa amb l'esforç mínim de $5,2 \text{ kN}$ a compressió □

Exercici 2.24: Un anunci de forma triangular i pes $1\,000 \text{ kp}$ es troba penjat de dos cables dels nusos E i F de l'estructura plana que mostra la figura 2.22. El

suport A és fix i el B és de corrons. Es demana: 1) Reaccions en els suports. 2) Esforços en les barres (valor i signe). 3) Deformació màxima en l'estructura, indicant valor i barra en què es produeix, si la secció de cada barra és de 750 mm^2 i el mòdul de Young del material val $2 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$.

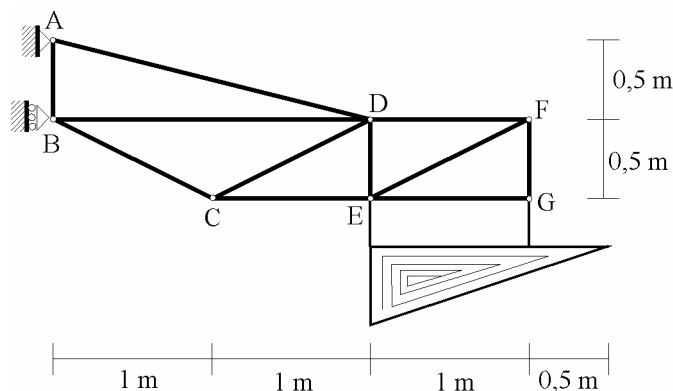


Figura 2.22: Estructura plana on penja l'anunci de l'exercici 2.24

Observació 2.18: Recordeu que el pes d'un sòlid homogeni s'aplica al seu centre de gravetat. Heu de calcular les tensions dels cables per a poder resoldre l'estructura.

SOLUCIÓ: 1. $R_{A_x} = -5\,000$ kp; $R_{A_u} = 1\,000$ kp; $R_{B_x} = 5\,000$ kp.

2. Diagrama a la pàgina 138.

3. La deformació màxima es produeix en la barra AD i val 0,693 mm.

Exercici 2.25: Atesa l'estructura que mostra la figura 2.25, es demana: 1) Reaccions en els suports. 2) Tensions en cada barra, indicant el valor i el tipus (tracció o compressió).

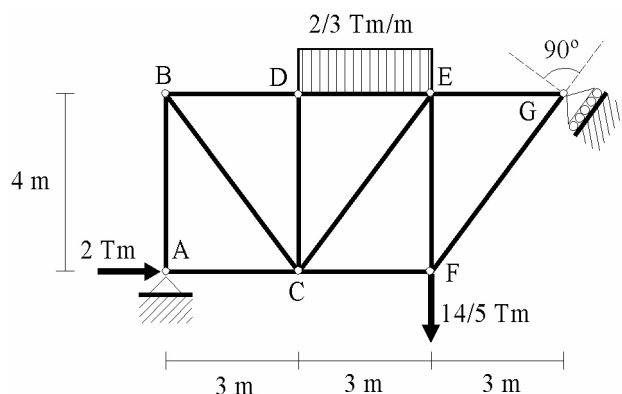


Figura 2.23: Estructura articulada de l'exercici 2.25

Observació 2.19: Recordeu que la càrrega distribuïda s'ha de repartir en els nusos adjacents per a resoldre l'estructura.

SOLUCIÓ: 1. $R_{Ax} = 0,4 \text{ Tm}$; $R_{Ay} = 3,0 \text{ Tm}$; $R_G = 3,0 \text{ Tm}$.
2. Diagrama a la pàgina 140

□

Exercici 2.26: Sobre l'estructura que mostra la figura 2.24 actua una càrrega mòbil de 600 kp, que es pot considerar puntual. La càrrega es pot moure sobre un carril de pes propi 400 kp, recolzat sobre els nusos A, B, D, F i G. Es demana que calculeu els esforços en les barres de l'estructura per a les tres situacions representatives següents:

1. La càrrega està situada en el nus A.
2. La càrrega està situada en el nus B.
3. La càrrega està situada en el nus D.

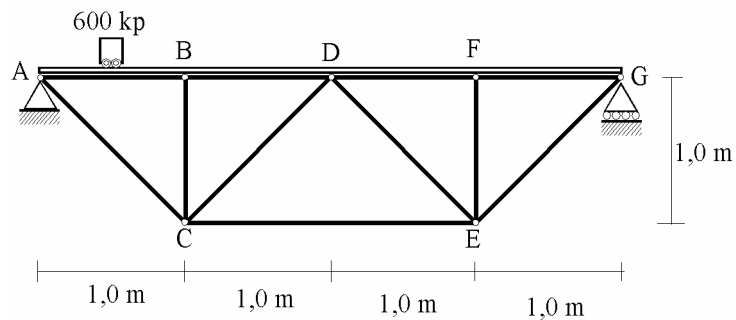


Figura 2.24: Estructura de l'exercici 2.26

Observació 2.20: Recordeu que la càrrega distribuïda s'ha de repartir en els nusos adjacents per a resoldre l'estructura.

SOLUCIÓ: 1. Diagrama a la pàgina 141.
2. Diagrama a la pàgina 143.
3. Diagrama a la pàgina 144

□

Abans de consultar la solució detallada dels exercicis en la secció 2.7, tracteu de resoldre'ls, preneu nota de les dificultats que hi heu trobat, identifiqueu els tipus d'errors que heu fet i aprofiteu tots els recursos disponibles al vostre abast en la Universitat. Podeu consultar la resolució d'aquests exercicis en la secció 2.7 amb tots els passos detallats.

2.5 Exercicis tipus problema investigació

Exercici 2.27: *En la construcció del pavelló de bàsquet d'Alacant s'utilitzen entramats articulats per a subjectar-ne el sostre. Indiqueu quin tipus d'estructures s'utilitzarien i per què i busqueu una solució per a la seua construcció. Tingueu en compte els efectes del vent en la sobrecoberta o en les façanes del pavelló que algunes vegades trenquen les estructures, com per exemple al pavelló esportiu de Dénia o de Sant Boi amb resultats catastròfics.*

Exercici 2.28: *Es vol penjar un anunci suportat amb una estructura articulada. Discutiu les possibles solucions i apliqueu-les a una situació concreta. Tingueu en compte els efectes del vent sobre l'estructura.*

Exercici 2.29: *L'empresa que gestiona l'autocine de Tàngel (Alacant) vol analitzar les reaccions que han hagut de suportar els recolzaments de l'estructura articulada que subjecta la pantalla, com a conseqüència dels forts vents que s'han produït en aquesta zona.*

L'alumnat ha de pensar i reflexionar la manera d'enfrontar-se a una possible situació real. Lògicament la solució no és única i caldrà prendre les decisions òptimes. Aquesta proposta de problema investigació s'integra en el bloc temàtic d'estàtica aplicada a les estructures articulades planes. Els objectius generals són:

- Comprendre l'interés de conèixer les propietats elàstiques i la resistència dels diferents materials que s'utilitzen en les estructures articulades.
- Intervenir en projectes tècnics amb autonomia i confiança i participar en la planificació i desenvolupament de solucions estructurals en equip.
- Identificar les condicions que ha de complir la possible solució en funció de les normes establides per les autoritats competents i la legalitat vigent del codi tècnic de l'edificació.

Els objectius específics són:

- Saber calcular la deformació axial en els elements estructurals.
- Saber la llei de Hooke.
- Saber els mètodes de resolució d'estructures.
- Saber calcular les reaccions en els suports.
- Conèixer el fonament del nucli central d'una secció.

- Plantejar-se solucions alternatives mitjançant lleugeres modificacions de les magnituds físiques, dels materials dels cables i estructurals, per a comparar-les i triar la que consideren més adequada.

L'apèndix B conté les característiques principals d'aquesta metodologia.

2.6 Resolució dels exercicis tipus qüestió

Exercici 2.1 En l'estructura articulada que es mostra en la figura 2.1 de la pàgina 79 el punt B es desplaça 5 cm cap avall. Determineu:

1. Les deformacions unitàries longitudinals en les barres AB i BC.
2. Els esforços en cadascuna de les dues barres. Doneu el resultat en Pa (N/m^2). Les barres són d'acer i el seu mòdul de Young és $E_{\text{acer}} = 2,1 \times 10^6 \text{ kp/cm}^2$.

Atesa la figura 2.25, les longituds de les barres en cm són $\overline{AB} = 240 \text{ cm}$, $\overline{AB'} = 240,05 \text{ cm}$, $\overline{BC} = 300 \text{ cm}$ i $\overline{B'C} = 303,03 \text{ cm}$.

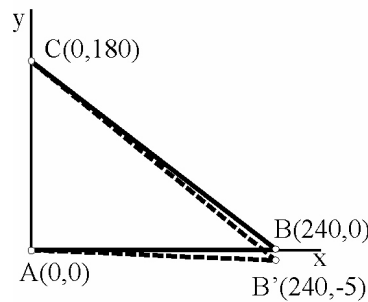


Figura 2.25: Diagrama del desplaçament de l'estructura de l'exercici 2.1

Aplicant la definició de deformació unitària s'obté que:

$$\epsilon_{AB} = \frac{\overline{AB'} - \overline{AB}}{\overline{AB}} = \frac{240,05 - 240}{240} = 2,08 \cdot 10^{-4}$$

$$\epsilon_{BC} = \frac{\overline{B'C} - \overline{BC}}{\overline{BC}} = \frac{303,03 - 300}{300} = 101 \cdot 10^{-4}$$

Aplicant la llei de Hooke $\sigma = E \cdot \epsilon$, els esforços en cadascuna de les barres serà:

$$\sigma_{AB} = E \cdot \epsilon_{AB} = 2,1 \cdot 10^6 \cdot 2,08 \cdot 10^{-4} = 437 \cdot 9,8 \cdot 10^4 = 42,8 \cdot 10^6 \text{ Pa}$$

$$\sigma_{BC} = E \cdot \epsilon_{BC} = 2,1 \cdot 10^6 \cdot 101 \cdot 10^{-4} = 21210 \cdot 9,8 \cdot 10^4 = 2,08 \cdot 10^9 \text{ Pa}$$

Exercici 2.2 En la construcció d'un edifici s'utilitza un cable d'acer de 6 mm de diàmetre per a l'elevació de materials. Si pengen verticalment 150 m de cable, per a elevar en el seu extrem inferior una càrrega de 200 kp, determineu l'allargament total del cable. El pes específic de l'acer és de $0,0078 \text{ kp/cm}^3$ i el seu mòdul de Young val $2,1 \times 10^6 \text{ kp/cm}^2$.

L'allargament absolut tindrà dos components: l'un corresponent al pes propi del cable i l'altre degut a la càrrega que s'eleva. Per tant:

$$\Delta L = \Delta L(\text{propi}) + \Delta L(\text{càrrega})$$

D'acord a l'exercici 10.2R de [13], l'augment total de longitud d'una barra recta de longitud L , secció constant S , penjada verticalment i sotmesa al seu propi pes P , pot expressar-se com:

$$\Delta L(\text{propi}) = \frac{P \cdot L}{2 \cdot E \cdot S}$$

Atés que el pes del cable es pot calcular com el producte del pes específic i el seu volum, i aquest com el producte de la seua secció i la seua longitud, l'expressió anterior en funció d'aquests paràmetres és:

$$\Delta L(\text{propi}) = \frac{P_e \cdot V \cdot L}{2 \cdot E \cdot S} = \frac{P_e \cdot S \cdot L^2}{2 \cdot E \cdot S} = \frac{P_e \cdot L^2}{2 \cdot E}$$

En unitats del sistema tècnic els valors que s'obtenen són:

$$P_e = 0,0078 \frac{kp}{cm^3} = 7800 \frac{kp}{m^3}; \quad S = \pi \cdot 3^2 \cdot 10^{-6} m^2$$

$$E = 2,1 \cdot 10^6 \frac{kp}{cm^2} = 2,1 \cdot 10^{10} \frac{kp}{m^2}$$

Com que la longitud del cable és 150 m, l'allargament propi val:

$$\Delta L(\text{propi}) = \frac{7800 \cdot 150^2}{2 \cdot 2,1 \cdot 10^{10}} \approx 4,2 \cdot 10^{-3} m = 4,2 mm$$

A continuació s'obté l'allargament produït en el cable per la càrrega Q de 200 kp:

$$\Delta L(\text{càrrega}) = \frac{Q \cdot L}{E \cdot S} = \frac{200 \cdot 150}{2,1 \cdot 10^{10} \cdot \pi \cdot 3^2 \cdot 10^{-6}} \approx 5,05 \cdot 10^{-2} m = 5,05 cm$$

Per tant, **l'allargament total del cable** serà:

$$\Delta L = \Delta L(\text{propi}) + \Delta L(\text{càrrega}) = 0,42 + 5,05 = 5,47 cm$$

Exercici 2.3 Les barres del cavall de la figura 2.2 de la pàgina 80 no poden suportar càrregues de tracció superiors a 80 kN, ni càrregues de compressió superiors a 50 kN. Calculeu el valor màxim de la càrrega P que pot suportar l'estructura.

Atesa la simetria del cavall, que P està aplicada en l'eix de simetria de l'estructura i tenint en compte que no hi ha càrregues horitzontals aplicades, les reaccions en els suports han de ser verticals, de sentit contrari a la càrrega P aplicada i amb valors iguals a $P/2$. A més a més, això implica que les barres horitzontals inferiors (AD i DF) no treballen perquè només actuen càrregues verticals en els nusos dels lligams (tal com es pot veure en la figura 2.26).

La figura 2.27 mostra els DSL dels nusos B i C que s'utilitzara per a resoldre aquesta estructura. L'angle α val:

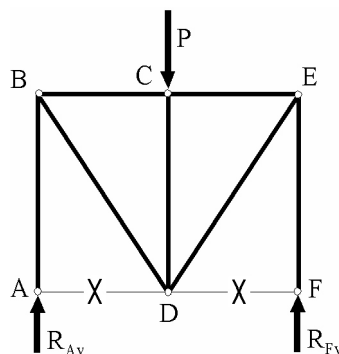


Figura 2.26: DSL del cavall de l'exercici 2.3

$$\tan \alpha = \frac{3}{2} \rightarrow \alpha \sim 56,3^\circ$$

Resulta senzill deduir que la barra AB treballa a compressió amb un esforç de valor $P/2$. I en el nus B les equacions de l'equilibri són (vegeu la figura 2.27 costat esquerre):

$$\sum_{i=1}^2 F_{i_x} = 0 = T_{BC} + T_{BD} \cdot \cos 56,3^\circ \Rightarrow T_{BC} = -\frac{P}{3}$$

$$\sum_{i=1}^2 F_{i_y} = 0 = -T_{BD} \cdot \sin 56,3^\circ + \frac{P}{2} \Rightarrow T_{BD} \sim 0,6 P$$

Per tant, la barra BD treballa a tracció i la barra BC a compressió.

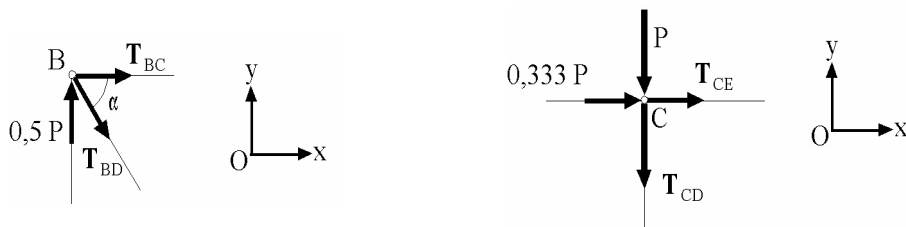


Figura 2.27: DSL dels nusos B i C de l'estructura de l'exercici 2.3

En el nus C resulta obvi que la barra CD treballa a compressió amb un esforç que val P (vegeu la figura 2.27 costat dret). La simetria de l'estructura permet establir que en el nus E es tindran els mateixos esforços que en el nus B (tipus i valor). Per tant, la barra DE té la mateixa tensió que la BD i la EF que la AB.

La major càrrega de tracció és $T_{BD} = 0,6 P \leq 80 \text{ kN}$, que implica que $P \leq 133,3 \text{ kN}$. La màxima càrrega de compressió és $T_{CD} = P \leq 50 \text{ kN}$.

El límit vindrà indicat pel menor dels dos tipus d'esforços que correspon a la càrrega màxima de compressió. Per tant, **el valor màxim del pes que es podrà suportar serà de 50 kN.**

Exercici 2.4 Una barra quadrada d'alumini, de 5 cm de costat i 25 cm de longitud, està sotmesa a càrregues axials de tracció en els

seus extrems. S'ha observat experimentalment que la deformació unitària en la direcció de la càrrega és 0,001. Determineu el volum de la barra quan actua la càrrega. Supposeu que el mòdul de Poisson del material és 0,33.

La variació relativa del volum d'una peça prismàtica en funció de la deformació axial ϵ_σ i del coeficient de Poisson ν s'expressa com:

$$\frac{\Delta V}{V} = \epsilon_\sigma \cdot (1 - 2 \cdot \nu) = 0,001 \cdot (1 - 2 \cdot 0,33) = 3,4 \cdot 10^{-4}$$

El volum de la barra quadrada és $V = 5^2 \cdot 25 = 625 \text{ cm}^3$. Per tant, el volum de la barra quan actua la càrrega Q serà:

$$V_Q = V + \Delta V = V + 3,4 \cdot 10^{-4} = 1,00034 \cdot V = 625,2125 \text{ cm}^3$$

Exercici 2.5 És usual, per facilitat constructiva i per satisfer unes característiques mínimes de resistència, construir estructures, com la de la figura 2.3 de la pàgina 81, utilitzant pocs elements (barres) distints (en aquest cas només 3). Per a dimensionar l'estructura, n'hi ha prou de determinar el màxim valor de l'esforç de compressió en les barres horitzontals de la part de dalt (que té lloc en les barres HJ o JL); la màxima tracció en les horitzontals de baix (barres GI o IK); la tensió de la barra diagonal que més treballa (barres BC o RO), i la màxima tensió sobre les barres verticals (AB o QR). Es demana: 1) Determineu les tensions en les barres HJ, GI, BC i AB. Es recomana utilitzar el mètode de seccions; 2) Si la secció de les barres és igual a 10 cm^2 , es demana determinar l'esforç que apareix en la barra que més treballa de l'estructura, i també la deformació (unitària i absoluta) d'aquesta barra, sabent que està feta d'acer, el mòdul de Young de la qual val $2 \times 10^6 \text{ kp/cm}^2$.

Atesa la simetria de l'estructura i la distribució simètrica de les càrregues verticals sobre aquesta, les reaccions en els suports A i Q són idèntiques i de valor 4,50 Tm. D'altra banda, com que en el nus A només actuen càrregues verticals, es dedueix que la barra AC no treballa i que la barra AB treballa a compressió amb un esforç que val $T_{AB} = 4,50 \text{ Tm}$.

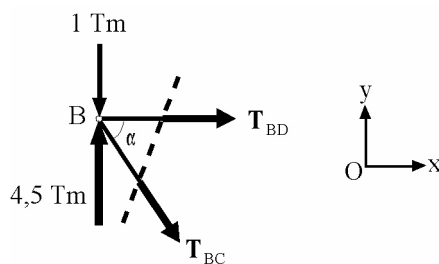


Figura 2.28: DSL del nus B de l'exercici 2.5

El DSL corresponent al nus B s'indica en la figura 2.28. L'angle α val $\alpha = \arctan(3/2) = 56,3^\circ$. Les equacions d'equilibri són:

$$\sum_{i=1}^2 F_{ix} = 0 = T_{BD} + T_{BC} \cdot \cos 56,3^\circ \implies T_{BD} = -2,33 \text{ Tm}$$

$$\sum_{i=1}^3 F_{iy} = 0 = 4,5 - 1 - T_{BC} \cdot \sin 56,3^\circ \implies T_{BC} = 4,21 \text{ Tm}$$

Aquests resultats indiquen que la barra BC treballa a tracció i la barra BD a compressió.

La figura 2.29 mostra el DSL de la part de l'estructura a què s'aplica el mètode de Ritter. Les equacions de l'equilibri per a aquesta part, prenent moments respecte del punt H amb sentit positiu el sentit de moviment de les agulles d'un rellotge, són:

$$\sum_{i=1}^3 F_{ix} = 0 = T_{HJ} + T_{HI} \cos 56,3^\circ + T_{GI}$$

$$\sum_{i=1}^6 F_{iy} = 0 = 4,5 - 1 - 1 - 1 - 1 - T_{HI} \cdot \sin 56,3^\circ \implies T_{HI} = 0,60 \text{ Tm}$$

$$\sum_{i=1}^5 M_{iH} = 0 = 4,5 \cdot 6 - 1 \cdot 6 - 1 \cdot 4 - 1 \cdot 2 - T_{GI} \cdot 3 \implies T_{GI} = 5,00 \text{ Tm}$$

I substituint aquests valors en la primera equació, s'obté que l'esforç de la barra HJ val $T_{HJ} = -5,33 \text{ Tm}$. És a dir, que les barres HI i GI treballen a tracció i la barra HJ a compressió, sent aquesta barra la que més treballa de l'estructura.

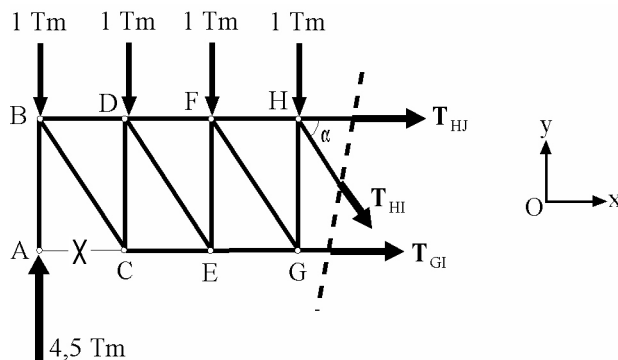


Figura 2.29: DSL de la part de l'estructura que queda a l'esquerra de la línia discontinua de l'exercici 2.5. S'indica també la barra que no treballa

Es denomina tensió normal (axial) al quocient entre la força en una secció (esforç) i el valor de l'àrea de la secció. Per tant:

$$\sigma_{HJ} = \frac{T_{HJ}}{S} = \frac{5,33 \cdot 10^3}{10} = 533 \text{ kp/cm}^2$$

A partir de la llei de Hooke, s'obtenen els valors de la deformació axial unitària i absoluta:

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{533}{2 \cdot 10^6} = 2,67 \cdot 10^{-4}$$

$$\epsilon = \frac{\Delta L}{L_0} \implies \Delta L = \epsilon \cdot L_0 = 2,67 \cdot 10^{-4} \cdot 2 = 5,33 \cdot 10^{-4} \text{ m} = 0,533 \text{ mm}$$

2.7 Resolució dels exercicis tipus examen

Exercici 2.6 La part superior d'una columna troncocònica té una secció de 4 cm^2 i la base de 16 cm^2 (figura 2.4 de la pàgina 82). Si el mòdul de Young del material val $7 \times 10^9 \text{ kp/m}^2$, calculeu la càrrega que actua sobre la columna si la longitud d'aquesta disminueix en $0,1 \text{ mm}$.

En una secció cònica, es pot obtenir l'expressió de la secció en funció de l'altura, si es té en compte que hi ha una proporció entre els valors de les seccions i els quadrats de les distàncies al vèrtex. Per tant, d'acord al dibuix de la part esquerra de la figura 2.30:

$$\frac{S}{S'} = \frac{H^2}{(H-1)^2} \Rightarrow \frac{16}{4} = \frac{H^2}{(H-1)^2} \Rightarrow 2 = \frac{H}{H-1} \Rightarrow H = 2 \text{ m}$$

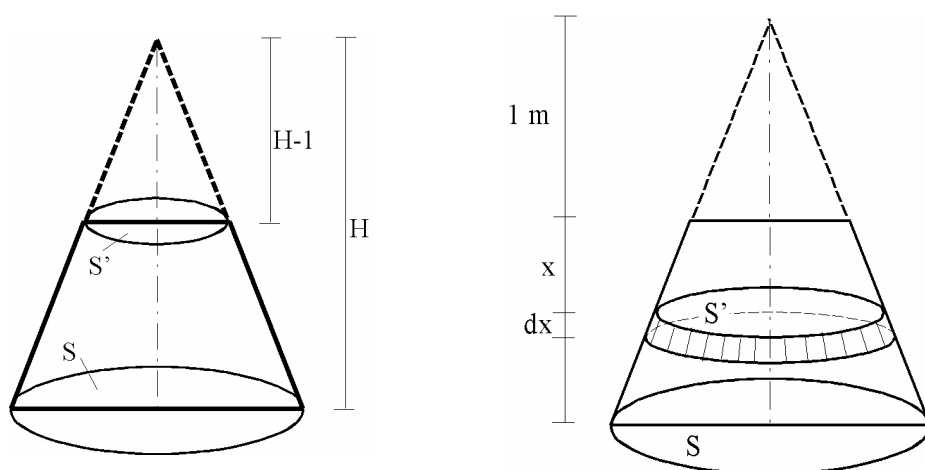


Figura 2.30: Diagrames de la secció troncocònica de l'exercici 2.6

Considerem una rodanxa de gruix dx , situada a una distància x del vèrtex del con que es correspon amb la columna troncocònica d'aquest exercici (vegeu la part dreta de la figura 2.30). La secció de cadascuna de les rodanxes no és constant, ja que depèn de la distància x . Com que la columna troncocònica recolza en el sòl, la deformació de la rodanxa de gruix dx , que treballa a compressió, estarà produïda pel pes de la part de columna que queda per damunt seua, de manera que aplicant la llei de Hooke, l'acurtament total de longitud es pot expressar com:

$$\begin{aligned} \Delta(dx) &= \frac{\sigma}{E} \cdot dx = \frac{P}{S' \cdot E} \cdot dx \frac{S}{S'} = \frac{2^2}{(1+x)^2} \Rightarrow S' = \frac{(1+x)^2 \cdot S}{4} \\ \Delta L_{total} &= \int_0^1 \frac{P}{S' \cdot E} \cdot dx = \int_0^1 \frac{P}{\frac{(1+x)^2 \cdot S}{4} \cdot E} \cdot dx = \frac{4 \cdot P}{S \cdot E} \int_0^1 \frac{dx}{(1+x)^2} = \\ &= \frac{4 \cdot P}{S \cdot E} \left[\frac{-1}{1+x} \right]_0^1 = -\frac{4 \cdot P}{S \cdot E} \left(1 - \frac{1}{2} \right) = \frac{2 \cdot P}{S \cdot E} \Rightarrow P = \frac{\Delta L_{total} \cdot S \cdot E}{2} \end{aligned}$$

Per tant, la càrrega total que actua sobre la columna s'obtindrà en substituir en l'expressió anterior els valors $\Delta L_{total} = 10^{-4}$ m, $E = 7 \cdot 9,8 \cdot 10^9 = 6,86 \cdot 10^{10}$ N/m² i $S = 1,6 \cdot 10^{-3}$ m²:

$$P = \frac{10^{-4} \cdot 1,6 \cdot 10^{-3} \cdot 6,86 \cdot 10^{10}}{2} = 5\,488 \text{ N}$$

Exercici 2.7 Atesa l'estructura en pòrtic de la figura 2.5 de la pàgina 82, es demana determinar: 1) Reaccions en els suports. 2) Esforços en les barres. Doneu el valor i el tipus d'esforç, usant el mètode de Cremona. 3) Amb el mètode de seccions determineu l'esforç en la barra n-o. En la figura 2.7 s'indiquen les zones de la notació de Bow.

La càrrega total vertical de $2 + 6 + 2 = 10$ Tm té una distribució simètrica sobre l'estructura en pòrtic, per tant, es reparteix igualment entre els dos suports: $R_{Ay} = R_{Ly} = 5$ Tm.

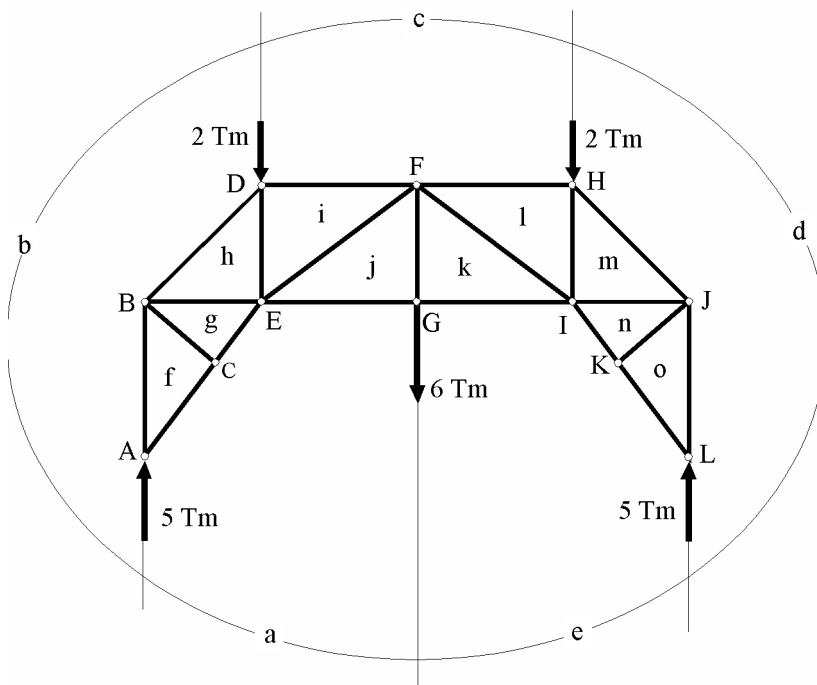


Figura 2.31: Divisió del pla de l'estructura de l'exercici 2.7 en zones

En la figura 2.31 s'estableixen les zones exteriors i interiors de l'estructura. Les barres que a priori se sap que no treballen no s'han assenyalat, com per exemple, f-g, n-o, f-a, n-e, perquè el diagrama de Cremona ja ho indicarà.

El diagrama de Cremona s'indica en la figura 2.32 on a la dreta s'indiquen els valors i tipus dels esforços d'acord a l'escala que s'ha utilitzat en aquest.

En la figura 2.33 es mostra el DSL de la secció que s'ha utilitzat per a calcular l'esforç de la barra n-o.

Prenent moments respecte del nus L, tots els esforços la línia d'acció dels quals passen per L tindran moment nul. Per tant:

$$\sum_{i=1}^4 M_{iL} = 0 = T_{no} \cdot 3 = 0 \implies T_{no} = 0 \text{ Tm}$$

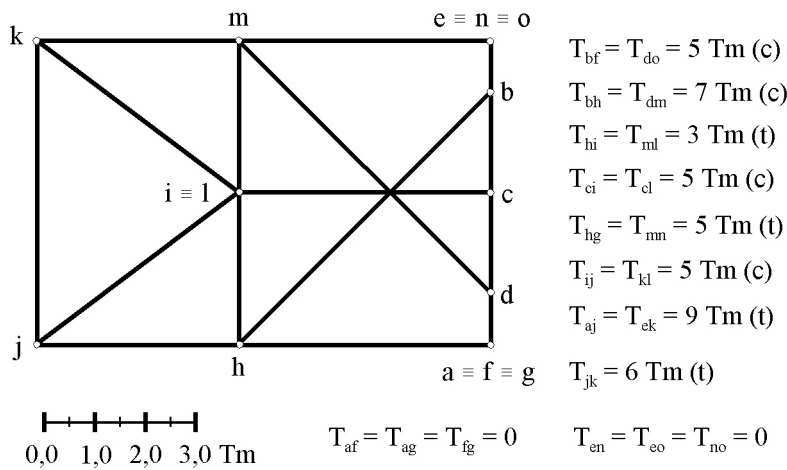


Figura 2.32: Diagrama de Maxwell-Cremona de l'exercici 2.7 i esforços en les barres (tipus i valor)

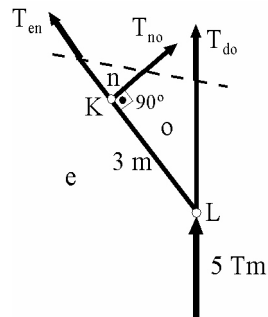


Figura 2.33: DSL de la secció que talla les barres e-n, n-o i o-d

Exercici 2.8 L'estructura de la figura 2.6 de la pàgina 83 té un suport de passador en A i un rodet en F. Es demana: 1) Les reaccions en els suports. 2) Esforços en les barres, valor i tipus. Es valorarà la utilització del diagrama de Maxwell-Cremona.

Per a calcular les reaccions en els suports, es dibuixa el DSL d'aquesta estructura, que es mostra en la figura 2.34.

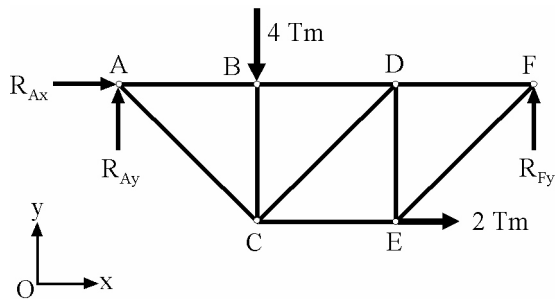


Figura 2.34: DSL de l'estructura de l'exercici 2.8

Prenent moments respecte del punt A, sent positius els que tenen el sentit de les agulles del rellotge, les equacions de l'equilibri quedarien de la forma

següent:

$$\sum_{i=1}^2 F_{i_x} = 0 = R_{A_x} + 2 \implies R_{A_x} = 2,00 \text{ Tm}$$

$$\sum_{i=1}^3 F_{i_y} = 0 = R_{A_y} - 4 + R_{F_y}$$

$$\sum_{i=1}^3 M_{i_A} = 0 = 4 \cdot 2 - R_{F_y} \cdot 6 - 2 \cdot 2$$

les solucions de les quals són:

$$R_{A_x} = 2,00 \text{ Tm}; R_{A_y} = 3,33 \text{ Tm}; R_{F_y} = 0,667 \text{ Tm}$$

L'obtenció dels esforços, valor i tipus, es farà pel mètode gràfic de Maxwell-Cremona. En la figura 2.35 s'indiquen les zones exteriors i interiors de l'estructura.

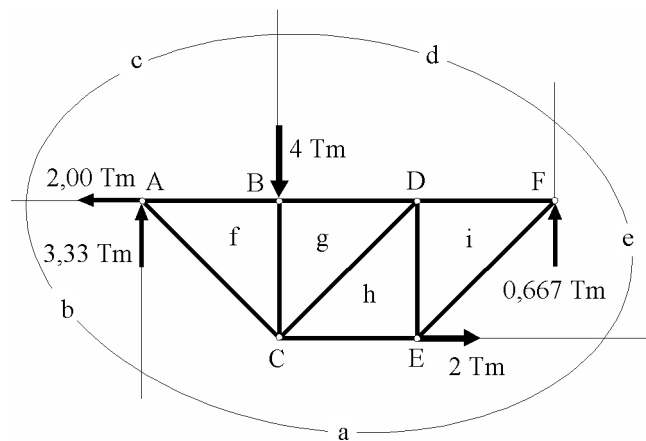


Figura 2.35: Definició de les zones de l'estructura de l'exercici 2.8

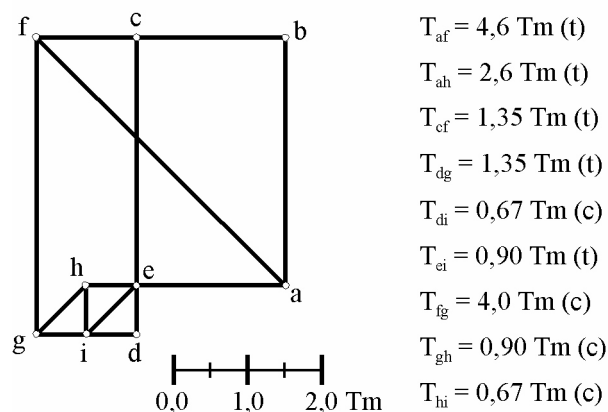


Figura 2.36: Diagrama de Maxwell-Cremona de l'exercici 2.8 i esforços en les barres (tipus i valor)

El diagrama de Maxwell-Cremona es mostra en la figura 2.36. Aquesta figura també indica l'escala de forces utilitzada i el valor i tipus dels esforços amb què treballen les barres.

Exercici 2.9 L'entramat articulat de la figura 2.7 de la pàgina 83 té un suport fix en el punt A i un altre de mòbil o de corrons en el punt F. Es demana: 1) Reaccions en els suports. 2) Esforços en les barres (valor i tipus).

La figura 2.37 mostra el DSL de l'entramat articulat.

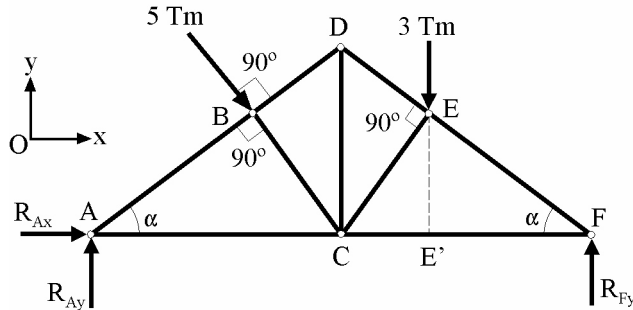


Figura 2.37: DSL de l'entramat articulat de l'exercici 2.9

Prenent moments respecte del punt A, sent positius els que tenen el sentit de les agulles del rellotge, s'arriba a les equacions d'equilibri següents:

$$\sum_{i=1}^2 F_{ix} = 0 = R_{Ax} + 5 \cdot \sin \alpha \implies R_{Ax} = -5 \cdot \sin \alpha$$

$$\sum_{i=1}^4 F_{iy} = 0 = R_{Ay} - 5 \cdot \cos \alpha - R_{Fy}$$

$$\sum_{i=1}^3 M_{iA} = 0 = 5 \cdot \overline{AB} + 3 \cdot \overline{AE'} - R_{Fy} \cdot 8$$

Per a l'angle α indicat en la figura 2.37, s'obté que:

$$\sin \alpha = \frac{\overline{CD}}{\overline{AD}} = \frac{3}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{3}{5}; \quad \cos \alpha = \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} = \frac{4}{5}$$

Per a les distàncies que necessitem per al càlcul dels moments i, per tant, per a poder resoldre les equacions de l'equilibri, tenim que (vegeu la figura 2.37):

$$\overline{AB} = \overline{AC} \cdot \cos \alpha = 4 \cdot \frac{4}{5} = \frac{16}{5} = \overline{EF}$$

$$\overline{AE'} = \overline{AC} + \overline{CE'} = \overline{AC} + 4 - \overline{EF} = \overline{AC} + 4 - \overline{EF} \cos \alpha = 4 + 4 - \frac{16}{5} \cdot \frac{4}{5} = 5,44 \text{ m}$$

Substituint aquests resultats en les equacions d'equilibri, obtenim les solucions següents:

$$R_{Ax} = -3,00 \text{ Tm}; \quad R_{Ay} = 2,96 \text{ Tm}; \quad R_{Fy} = 4,04 \text{ Tm}$$

L'obtenció dels esforços, valor i tipus, es farà pel mètode gràfic de Maxwell-Cremona. En la figura 2.38 s'indiquen les zones exteriors i interiors de l'entramat.

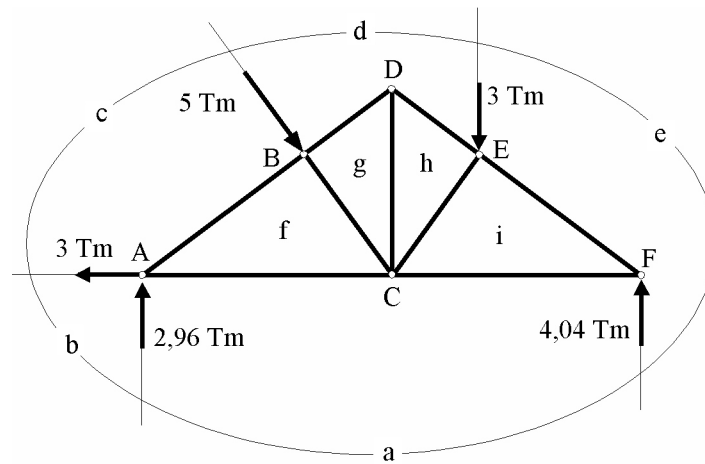


Figura 2.38: Definició de les zones de l'entramat de l'exercici 2.9

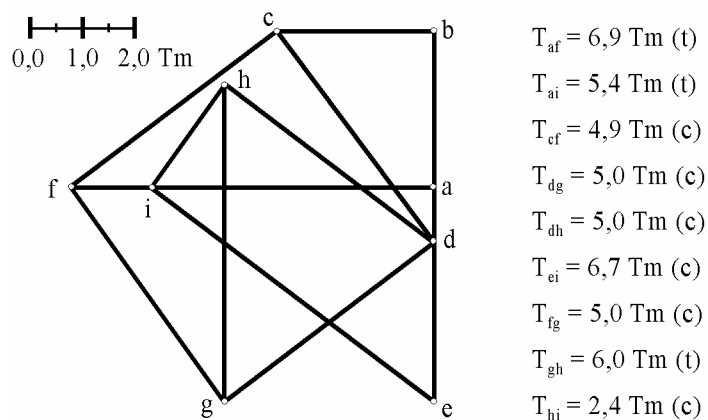


Figura 2.39: Diagrama de Maxwell-Cremona de l'exercici 2.9 i esforços en les barres (tipus i valor)

El diagrama de Maxwell-Cremona es mostra en la figura 2.39. Aquesta figura també indica l'escala de forces utilitzada i el valor i tipus dels esforços amb què treballen les barres.

Exercici 2.10 La figura 2.8 de la pàgina 84 mostra una estructura articulada plana destinada a suportar el pes de 20 000 kp situada a l'extrem d'aquesta. Calculeu: 1) Les reaccions en els suports. 2) Esforços en les barres, valor i tipus.

Per a calcular les reaccions en els suports, es dibuixa el DSL d'aquesta estructura, que es mostra en la figura 2.40. S'indiquen les barres que no treballen, AB, BC i CD, per concórrer tres forces en el nus C sent-ne dues col·lineals. Com que en el nus B només hi ha component vertical en la reacció del suport, la component horitzontal de la reacció en A ha de ser nul·la. Per tant, $R_{Ax} = 0$ kp.

Prenent moments respecte del punt A i tenint en compte el que s'ha deduït en el paràgraf previ, les equacions d'equilibri són:

$$\sum_{i=1}^3 F_{iy} = 0 = R_{Ay} + R_{By} - 20\,000 \implies R_{Ay} + R_{By} = 20\,000 \text{ kp}$$

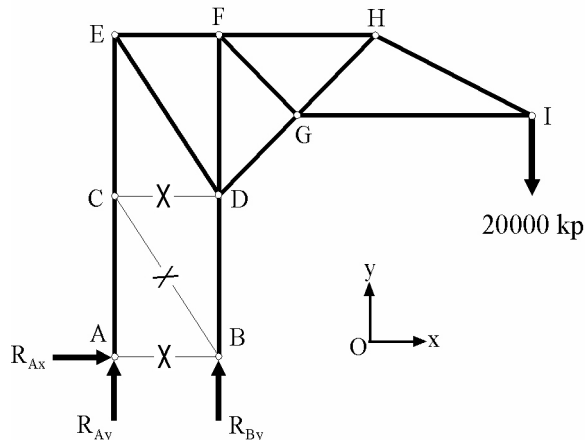


Figura 2.40: DSL de l'estructura de l'exercici 2.10. Les barres que no treballen també s'indiquen

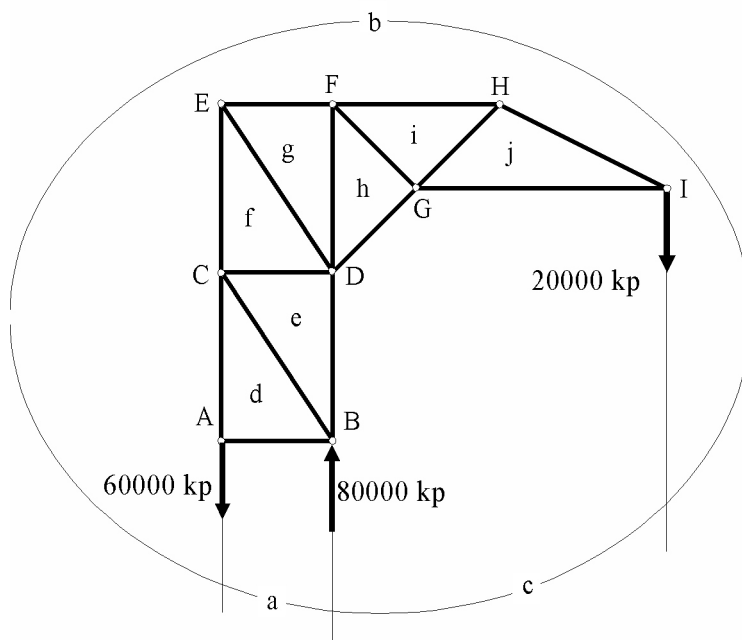


Figura 2.41: Divisió del pla de l'estructura de l'exercici 2.10 en zones

$$\sum_{i=1}^2 M_{i_I} = 0 = R_{B_y} \cdot 4 + 20\,000 \cdot 16 \implies R_{B_y} = 80\,000 \text{ kp}$$

Finalment, substituint aquest valor en la primera equació de l'equilibri, s'obté que el valor de la component vertical de la reacció en A: $R_{A_y} = -60\,000 \text{ kp}$.

L'obtenció dels esforços, valor i tipus, es farà pel mètode gràfic de Maxwell-Cremona. En la figura 2.41 s'indiquen les zones exteriors i interiors de l'estructura. S'han assenyalat les barres que se sap a priori que no treballen.

El diagrama de Maxwell-Cremona es mostra en la figura 2.42. Aquesta figura també indica l'escala de forces utilitzada i el valor i tipus dels esforços amb què treballen les barres. Com es pot comprovar, les barres que defineixen les zones a-d, d-e i e-f són concurrents en un punt. Aquest fet indica que no treballen, la qual cosa ja s'havia deduït a l'inici de la resolució d'aquest

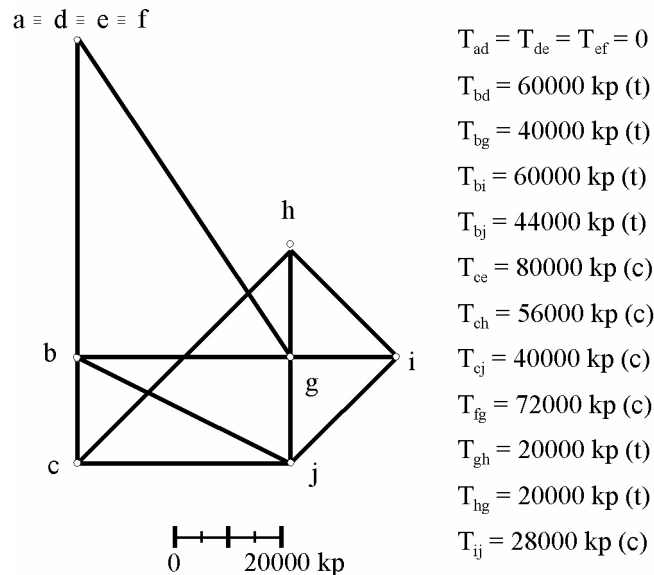


Figura 2.42: Diagrama de Maxwell-Cremona de l'exercici 2.10 i esforços en les barres (tipus i valor)

exercici.

Exercici 2.11 La figura 2.9 de la pàgina 85 mostra una estructura en volada destinada a suportar una bastida com la que mostra aquest exercici. L'estructura té un recolzament fix en el punt D i està subjectada per un cable unit al punt C. Les dimensions i els angles que formen les barres de l'estructura s'indiquen en la mateixa figura. El pes de la bastida és de 600 kp. Es demana:

1. La força de reacció en el punt D i la força de tensió en el cable.
2. Esforços en cadascuna de les barres (valor i tipus).

Per a determinar les longituds de les barres que s'utilitzaran en la resolució d'aquest exercici, es consideraran els triangles rectangles que formen l'estructura. Així, s'obté que: $\overline{AB} = \overline{BE} = \overline{BC} \cdot \cos 30^\circ = 5,20 \text{ m}$ i $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC} = 5,20 + 6 = 11,20 \text{ m}$.

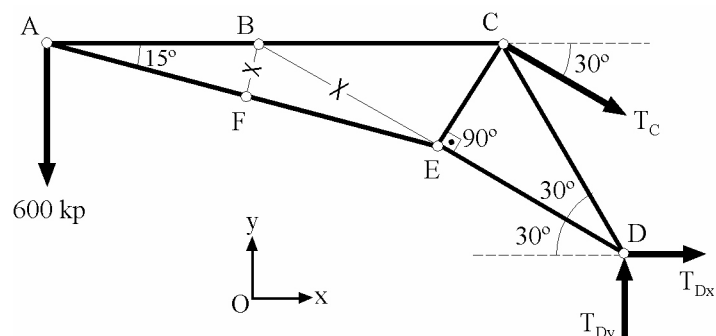


Figura 2.43: DSL de l'estructura en volada de l'exercici 2.11. S'assenyalen les barres que no treballen

La figura 2.43 representa el DSL de l'estructura en volada. S'indiquen les barres que se sap a priori que no treballen (BF, per concórrer tres barres en el nus F sent-ne dues col·lineals i, com a conseqüència, BE per la mateixa raó).

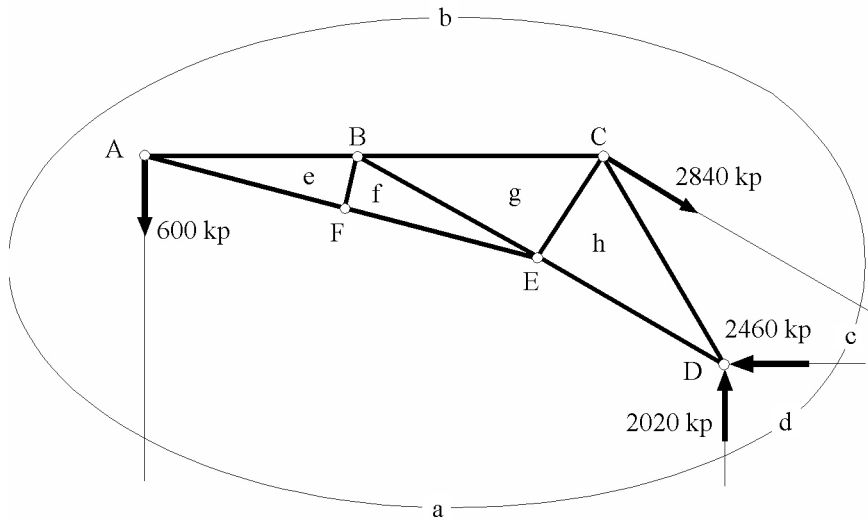


Figura 2.44: Definició de les zones de l'estructura de l'exercici 2.11

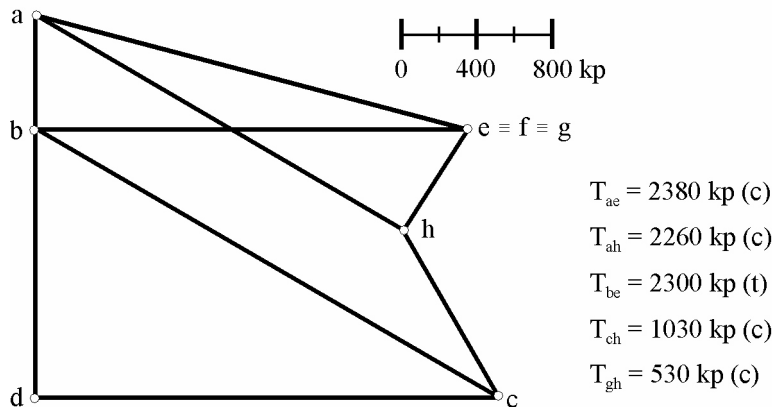


Figura 2.45: Diagrama de Maxwell-Cremona de l'exercici 2.11 i esforços en les barres (tipus i valor)

Prenent moments respecte del punt C, sent positius els que tenen el sentit de les agulles del rellotge, les equacions de l'equilibri quedarien de la forma següent:

$$\sum_{i=1}^2 F_{i_x} = 0 = T_{D_x} + T_C \cdot \cos 30^\circ$$

$$\sum_{i=1}^3 F_{i_y} = 0 = -600 - T_C \cdot \sin 30^\circ + T_{D_y}$$

$$\sum_{i=1}^3 M_{i_C} = 0 = 600 \cdot 11,20 + T_{D_y} \cdot 6 \cdot \sin 30^\circ + T_{D_x} \cdot 6 \cdot \cos 30^\circ$$

Resolent el sistema d'equacions anterior, s'obtingrien els resultats següents:

$$T_{D_x} = -2\,460 \text{ kp}; \quad T_{D_y} = 2\,020 \text{ kp}; \quad T_C = 2\,840 \text{ kp}$$

L'obtenció dels esforços, valor i tipus, es farà pel mètode gràfic de Maxwell-Cremona. En la figura 2.44 s'indiquen les zones exteriors i interiors de l'estructura. S'han assenyalat les barres que se sap a priori que no treballen.

El diagrama de Maxwell-Cremona es mostra en la figura 2.45. Aquesta figura també indica l'escala de forces utilitzada i el valor i tipus dels esforços amb què treballen les barres.

Exercici 2.12 Atesa l'estructura reticulada plana de la figura 2.10 de la pàgina 85, es demana: 1) Reaccions en els suports. 2) Esforços en les barres (valor i tipus).

Per a calcular les reaccions en els suports, es dibuixa el DSL d'aquesta estructura reticulada plana, que es mostra en la figura 2.46, on s'han indicat les barres que no treballen.

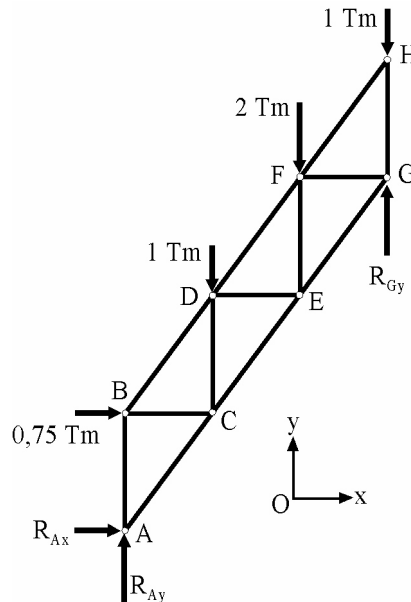


Figura 2.46: DSL de l'estructura reticulada plana de l'exercici 2.12

Prenent moments respecte del punt A, sent positius els que tenen el sentit de les agulles del rellotge, les equacions de l'equilibri quedarien de la forma següent:

$$\sum_{i=1}^2 F_{i_x} = 0 = R_{Ax} + 0,75 \implies R_{Ax} = -0,75 \text{ Tm}$$

$$\sum_{i=1}^5 F_{i_y} = 0 = R_{Ay} - 1 - 2 - 1 + R_{Gy}$$

$$\sum_{i=1}^5 M_{i_A} = 0 = 0,75 \cdot 2 + 1 \cdot 1,5 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 4,5 - R_{Gy} \cdot 4,5$$

les solucions de les quals són:

$$R_{A_x} = -0,75 \text{ Tm}; \quad R_{A_y} = 1,00 \text{ Tm}; \quad R_{G_y} = 3,00 \text{ Tm}$$

L'obtenció dels esforços, valor i tipus, es farà pel mètode gràfic de Maxwell-Cremona. En la figura 2.47 s'indiquen les zones exteriors i interiors de l'estructura. S'han assenyalat les barres que se sap a priori que no treballen.

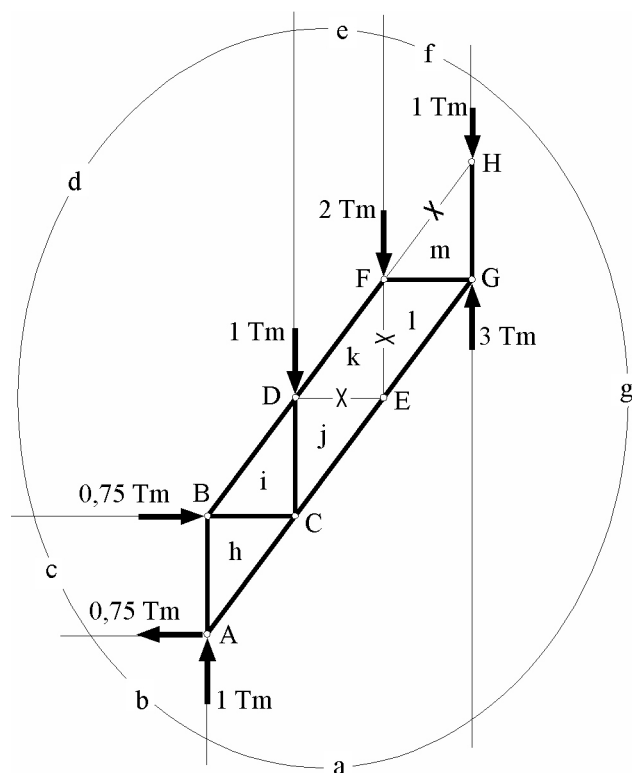


Figura 2.47: Definició de les zones de l'estructura reticulada plana de l'exercici 2.12

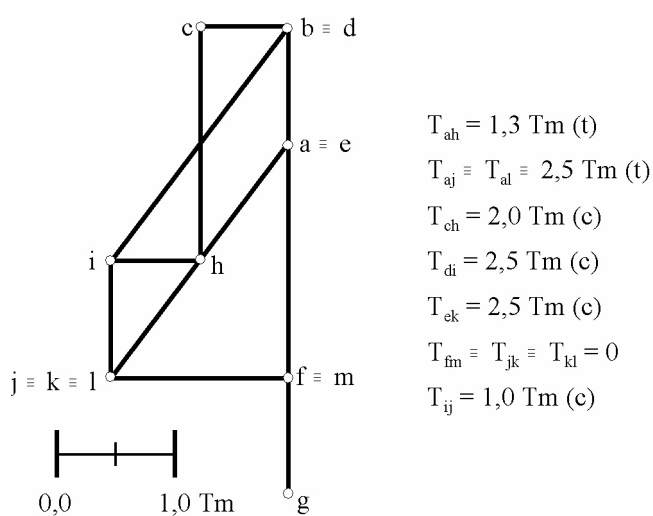


Figura 2.48: Diagrama de Maxwell-Cremona de l'exercici 2.12 i esforços en les barres (tipus i valor)

El diagrama de Maxwell-Cremona es mostra en la figura 2.48. Aquesta figura també indica l'escala de forces utilitzada i el valor i tipus dels esforços amb què treballen les barres.

Exercici 2.13 La figura 2.11 de la pàgina 86 mostra l'armadura d'una escala d'acer. Es demana: 1) Forces d'enllaç exteriors. 2) Esforços en les barres indicant el valor i tipus. 3) Quina hauria de ser la secció de les barres, expressades en cm^2 , perquè en cap cas l'esforç transmés a través de qualsevol d'aquestes fóra superior a 200 000 Pa?

La figura 2.49 representa el DSL de l'armadura de l'escala d'acer d'aquest exercici. Com que l'única component horitzontal que actua sobre l'armadura és la component x de la reacció en A, resulta obvi que R_{Ax} és nul·la.

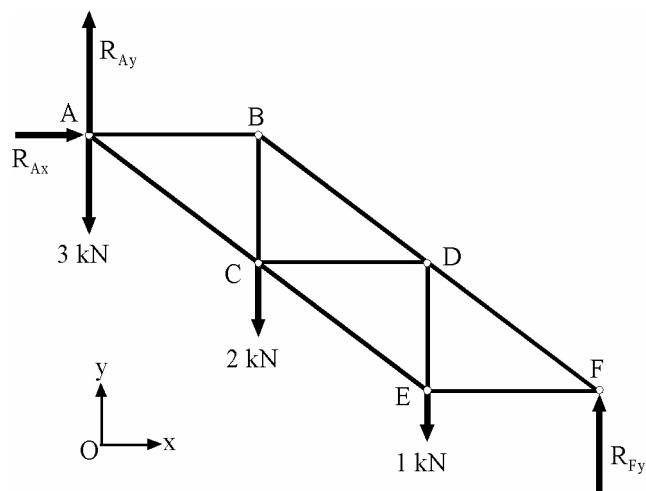


Figura 2.49: DSL de l'armadura de l'exercici 2.13

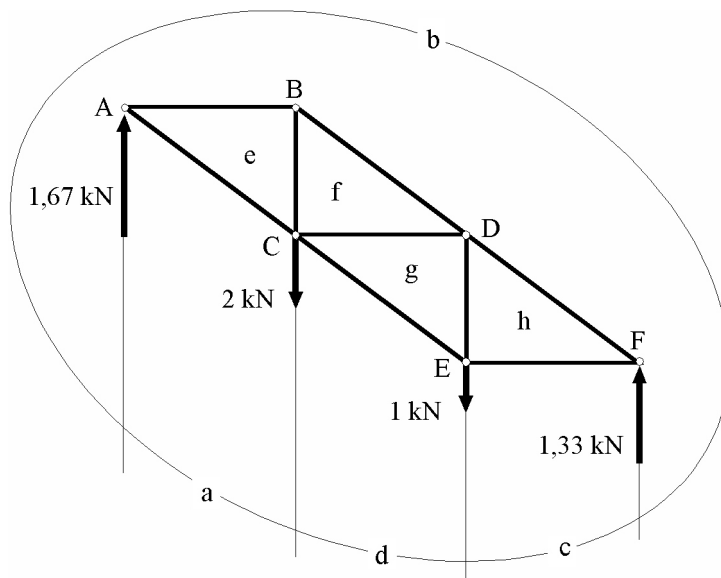


Figura 2.50: Definició de les zones de l'armadura de l'exercici 2.13

Prenent moments respecte del punt A, sent negatius els que tenen el sentit de les agulles del rellotge, les equacions de l'equilibri quedarien de la forma següent:

$$\sum_{i=1}^5 F_{i_y} = 0 = R_{A_y} - 3 - 2 - 1 + R_{F_y}$$

$$\sum_{i=1}^3 M_{i_A} = 0 = 2 \cdot 1,2 + 1 \cdot 2,4 - R_{F_y} \cdot 3,6$$

Resolent el sistema d'equacions anterior, s'obtidrien els resultats següents:

$$R_{A_y} = 4,67 \text{ kN}; \quad R_{F_y} = 1,33 \text{ kN}$$

L'obtenció dels esforços, valor i tipus, es farà pel mètode gràfic de Maxwell-Cremona. En la figura 2.50 s'indiquen les zones exteriors i interiors de l'armadura de l'escala d'acer. Cal indicar que s'ha fet la resultant parcial vertical en el nus A ($4,67 - 3 = 1,67 \text{ kN}$).

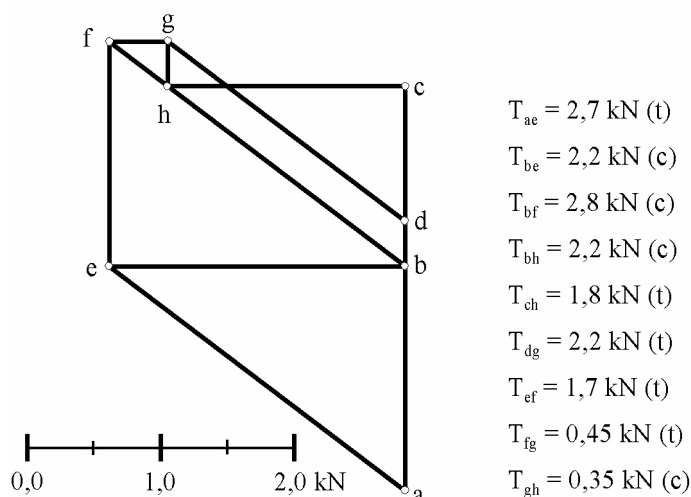


Figura 2.51: Diagrama de Maxwell-Cremona de l'exercici 2.13 i esforços en les barres (tipus i valor)

El diagrama de Maxwell-Cremona es mostra en la figura 2.51. Aquesta figura també indica l'escala de forces utilitzada i el valor i tipus dels esforços amb què treballen les barres.

La tensió (esforç) màxima es dona en la barra b-f: $T_{bf} = 2,8 \text{ kN}$. Com que la tensió axial és el quocient entre l'esforç en la barra i la seua secció, tenim que:

$$\sigma_{màx} = \frac{T_{màx}}{S} \Rightarrow S = \frac{T_{màx}}{\sigma_{màx}} = \frac{2,8 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5} = 1,4 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2 = 140 \text{ cm}^2$$

Exercici 2.14 Una càmera de televisió es pot moure sobre un carril continu (densitat lineal = 50 kp/m) que està recolzat sobre els nusos A, C, D i E de l'estructura en volada de la figura 2.12 de la pàgina 86. L'estructura té un suport fix en A i un altre

de corròns en B. El pes de la càmera és de 100 kp i es troba situada en l'extrem del carril. Es demana: 1) Reaccions en els suports. 2) Esforços en les barres (valor i tipus).

El carril continu és una càrrega uniformement distribuïda el sistema equivalent de la qual és el pes total del carril, P , aplicat sobre el centre de gravetat (en aquest cas, en el punt mitjà a 2,5 m del nus A). És a dir:

$$P = \text{densitat lineal} \cdot \overline{AG} = 50 \cdot 5 = 250 \text{ kp}$$

La figura 2.52 mostra el DSL del conjunt, on s'ha dibuixat el pes total del carril continu aplicat en el punt mitjà de la longitud \overline{AG} .

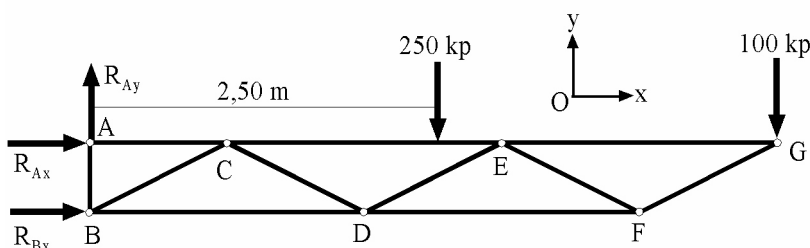


Figura 2.52: DSL del carril continu i càmera de televisió de l'estructura de l'exercici 2.14

Prenent moments respecte del punt A, sent negatius els que tenen el sentit de les agulles del rellotge, les equacions de l'equilibri quedarien de la forma següent:

$$\sum_{i=1}^2 F_{ix} = 0 = R_{Ax} + R_{Bx} \implies R_{Ax} = -R_{Bx}$$

$$\sum_{i=1}^3 F_{iy} = 0 = R_{Ay} - 250 - 100 \implies R_{Ay} = 350 \text{ kp}$$

$$\sum_{i=1}^3 M_{iA} = 0 = R_{Bx} \cdot 0,5 - 250 \cdot 2,5 - 100 \cdot 5 \implies R_{Bx} = 2250 \text{ kp}$$

Per tant, $R_{Ax} = -2250 \text{ kp}$.

Per a obtenir els esforços en les barres, s'assumeix que la càrrega distribuïda s'aplica sobre els nusos adjacents, repartint-la equitativament. És a dir, el pes del carril AE s'ha de distribuir sobre els nusos A, C, D i E, tenint en compte la densitat lineal del carril continu:

- Sobre la barra AC actua una càrrega de 50 kp. Es reparteix en 25 kp sobre el nus A i 25 kp sobre el nus C.
- Sobre la barra CD actua una càrrega de 100 kp. Es reparteix en 50 kp sobre el nus C i 50 kp sobre el nus D.
- Sobre la barra DE actua una càrrega de 100 kp. Es reparteix en 50 kp sobre el nus D i 50 kp sobre el nus E.

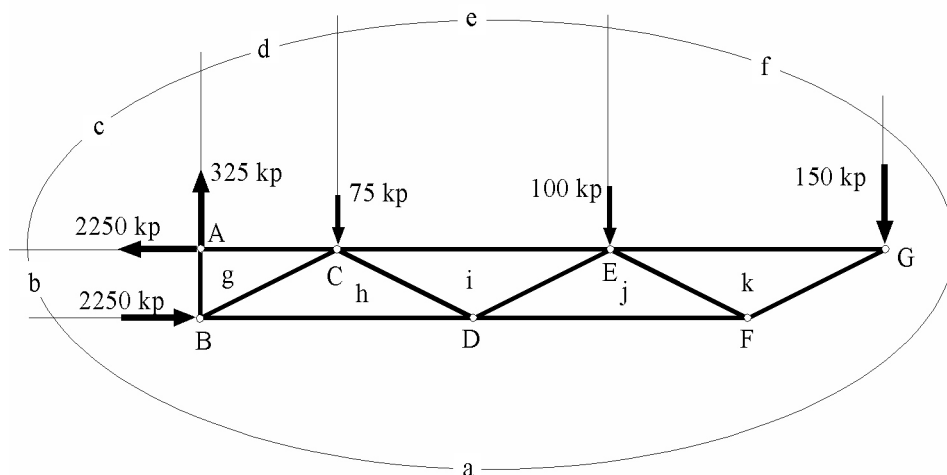
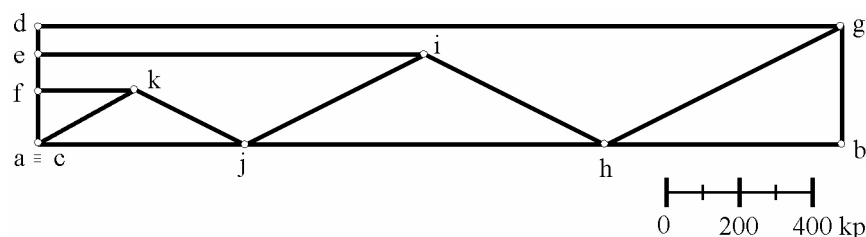


Figura 2.53: Definició de les zones de l'estructura de l'exercici 2.14

L'obtenció dels esforços, valor i tipus, es farà pel mètode gràfic de Maxwell-Cremona. En la figura 2.53 s'indiquen les zones exteriors i interiors de l'estructura. S'ha tingut en compte la reacció vertical en el nus A, el pes de la càmera de televisió en el nus E i la repartició del pes del carril continu a l'hora d'indicar les càrregues netes que actuen sobre els nusos A, C, D i E.



$T_{ah} = 1540 \text{ kp (c)}$ $T_{aj} = 560 \text{ kp (c)}$ $T_{ak} = 300 \text{ kp (c)}$
 $T_{bg} = 325 \text{ kp (t)}$ $T_{dg} = 2250 \text{ kp (t)}$ $T_{ei} = 1060 \text{ kp (t)}$ $T_{fk} = 260 \text{ kp (t)}$
 $T_{gh} = 720 \text{ kp (c)}$ $T_{hi} = 560 \text{ kp (t)}$ $T_{ii} = 560 \text{ kp (c)}$ $T_{ik} = 340 \text{ kp (t)}$

Figura 2.54: Diagrama de Maxwell-Cremona de l'exercici 2.14 i esforços en les barres (tipus i valor)

El diagrama de Maxwell-Cremona es mostra en la figura 2.54. Aquesta figura també indica l'escala de forces utilitzada i el valor i tipus dels esforços amb què treballen les barres.

Exercici 2.15 En el cavall simètric de la figura 2.13 de la pàgina 87, es demana: 1) Reaccions en els suports. 2) Esforços en les barres utilitzant el diagrama de Maxwell-Cremona.

El cavall no és només simètric, sinó que la distribució de les càrregues aplicades també és simètrica. La càrrega total vertical val 12 Tm i es distribuirà igualment sobre els dos recolzaments. Per tant, les reaccions en A i G seran verticals i del mateix valor cadascuna: $R_A = R_G = 6 \text{ Tm}$.

En la figura 2.55 s'estableixen les zones exteriors i interiors del cavall. En els nusos A i G s'han representat les resultants parcials de la càrrega i la reacció, el valor de les quals és de 4 Tm.

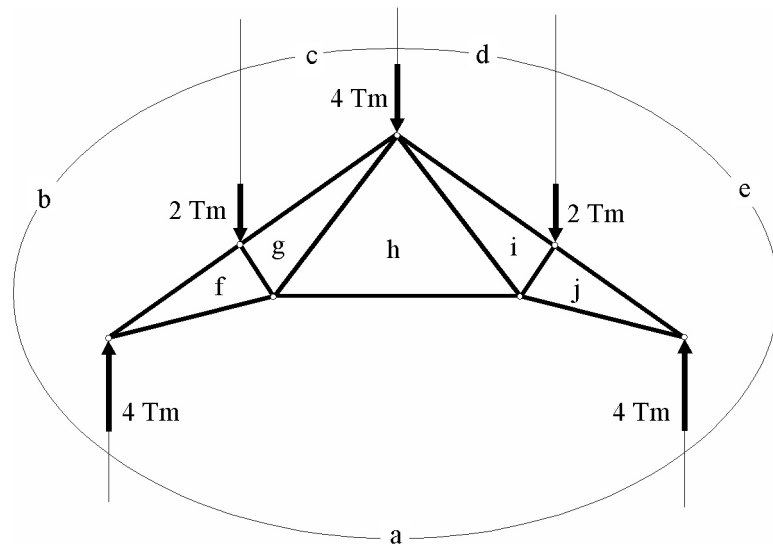


Figura 2.55: Divisió del pla del cavall de l'exercici 2.15 en zones d'acord amb la notació de Bow

En la figura 2.56 es mostra el diagrama de Maxwell-Cremona on s'indica l'escala de forces utilitzada. D'acord amb la longitud de cada segment, proporcional a l'esforç de cada barra, aquests esforços es donen a la dreta indicant-se com treballa la barra a tracció (t) o a compressió (c).

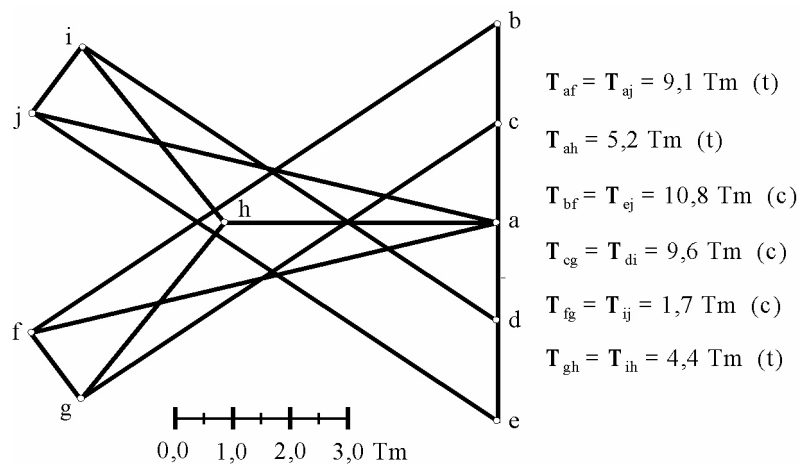


Figura 2.56: Diagrama de Maxwell-Cremona de l'exercici 2.15 i esforços en les barres (tipus i valor)

Exercici 2.16 Atesa l'estructura de la figura 2.14 de la pàgina 88, es demana: 1) Reaccions en els suports. 2) Esforços en les barres. Resoleu aquest apartat analíticament i utilitzant el diagrama de Maxwell-Cremona.

Per a calcular les reaccions en els suports, es dibuixa el DSL d'aquesta estructura, que es mostra en la figura 2.57. S'indiquen les barres que no treballen per ser-ne tres concurrents en un nus on dues d'elles són col·lineals.

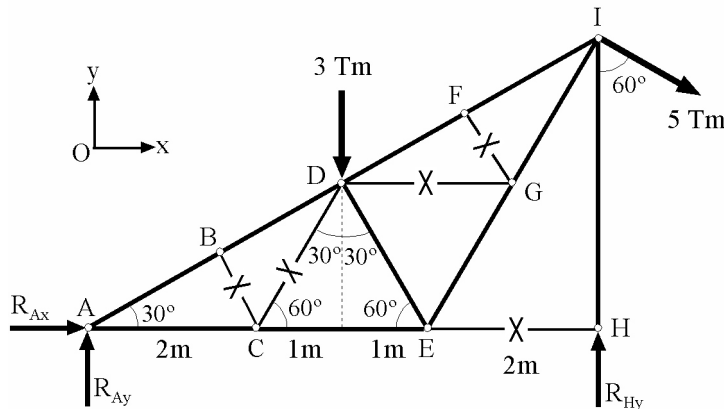


Figura 2.57: DSL de l'estructura de l'exercici 2.16. Les barres que no treballen també s'indiquen

Les equacions d'equilibri són:

$$\sum_{i=1}^2 F_{i_x} = 0 = R_{Ax} + 5 \cdot \cos 30^\circ \Rightarrow R_{Ax} = -4,33 \text{ Tm}$$

$$\sum_{i=1}^4 F_{i_y} = 0 = R_{Ay} - 3 - 5 \cdot \sin 30^\circ + R_{Hy} \Rightarrow R_{Ay} + R_{Hy} = 5,50 \text{ Tm}$$

i prenent moments respecte del punt I, sent positiu els que tenen el moviment de les agulles del rellotge, s'obtidria:

$$\sum_{i=1}^3 M_{i_I} = 0 = R_{Ax} \cdot 6 \cdot \tan 30^\circ + R_{Ay} \cdot 6 - 3 \cdot 3$$

Resolent el sistema d'equacions anterior, s'obtidrien les solucions següents:

$$R_{Ay} = 1,00 \text{ Tm}; \quad R_{Hy} = 6,50 \text{ Tm}$$

El mètode dels nusos és el procediment analític per al càlcul dels esforços en les barres d'una estructura qualsevol. La figura 2.58 mostra el DSL de cada nus analitzat en la resolució d'aquest exercici, indicant el sentit dels esforços emprats per a obtenir les equacions de l'equilibri. Comencem aquest anàlisi per un nus on no hi haja més de dos esforços desconeguts, com ara el nus A (part superior esquerra en la figura 2.58).

$$\sum_{i=1}^3 F_{i_x} = 0 = -4,33 + T_{AD} \cdot \cos 30^\circ + T_{AE} \Rightarrow T_{AE} = 2,60 \text{ Tm}$$

$$\sum_{i=1}^2 F_{i_y} = 0 = -1,00 + T_{AD} \cdot \sin 30^\circ \Rightarrow T_{AD} = 2,00 \text{ Tm}$$

Aquests resultats indiquen que les barres AD i AE treballen a tracció, tal com s'havia suposat.

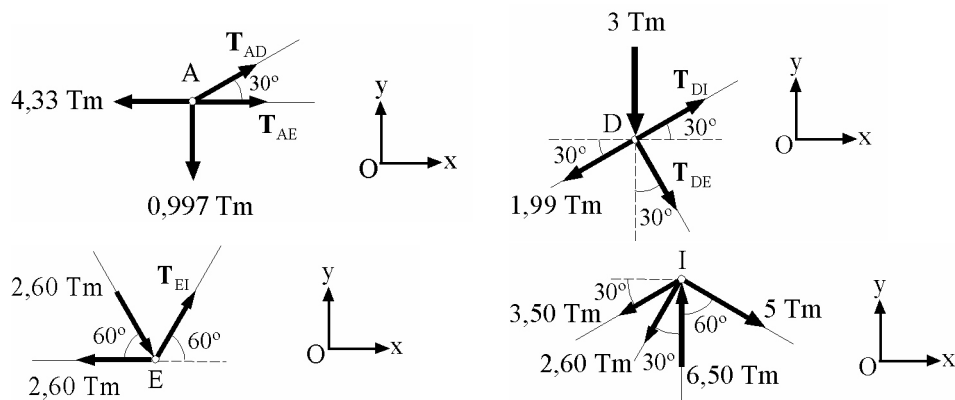


Figura 2.58: DSL dels nusos resolts de l'exercici 2.16

Continuem el mètode dels nusos resolent ara el nus D (part superior dreta en la figura 2.58):

$$\sum_{i=1}^3 F_{ix} = 0 = -2,00 \cdot \cos 30^\circ + T_{DI} \cdot \cos 30^\circ + T_{DE} \cdot \cos 60^\circ$$

$$\sum_{i=1}^4 F_{iy} = 0 = -2,00 \cdot \sin 30^\circ - 3 + T_{DI} \cdot \sin 30^\circ - T_{DE} \cdot \sin 60^\circ$$

Resolent les dues equacions obtindríem els resultats següents:

$$T_{DE} = -2,60 \text{ Tm}; \quad T_{DI} = 3,50 \text{ Tm}.$$

La barra DE treballa a compressió (sentit contrari al dibuixat) i la barra DI treballa a tracció. Per al nus E (part inferior esquerra en la figura 2.58):

$$\sum_{i=1}^3 F_{ix} = 0 = -2,60 + 2,60 \cdot \cos 60^\circ + T_{EI} \cdot \cos 60^\circ \implies T_{EI} = 2,60 \text{ Tm}$$

$$\sum_{i=1}^2 F_{iy} = 0 = -2,60 \cdot \sin 60^\circ + T_{EI} \cdot \sin 60^\circ \implies T_{EI} = 2,60 \text{ Tm}$$

La barra EI treballa a tracció. Finalment, es pot fer la comprovació dels resultats obtinguts amb el nus I (part inferior dreta en la figura 2.58):

$$\sum_{i=1}^3 F_{ix} = -3,50 \cdot \cos 30^\circ - 2,60 \cdot \cos 60^\circ + 5 \cdot \cos 30^\circ \approx 0$$

$$\sum_{i=1}^4 F_{iy} = -3,50 \cdot \sin 30^\circ - 2,60 \cdot \sin 60^\circ - 5 \cdot \sin 30^\circ + 6,50 \approx 0$$

En la figura 2.59 s'assenyalen les zones interiors i exteriors on s'assigna una lletra minúscula d'acord amb la notació de Bow.

En la figura 2.60 es mostra el diagrama de Maxwell-Cremona on s'indica l'escala de forces utilitzada. En aquesta figura s'indica el valor de l'esforç en cada barra, on ja estan indicades les barres que no treballen, i el tipus d'esforç de cada barra, a tracció (t) o a compressió (c). Quan les zones que defineixen una barra concorren en un punt vol dir que aquesta no treballa.

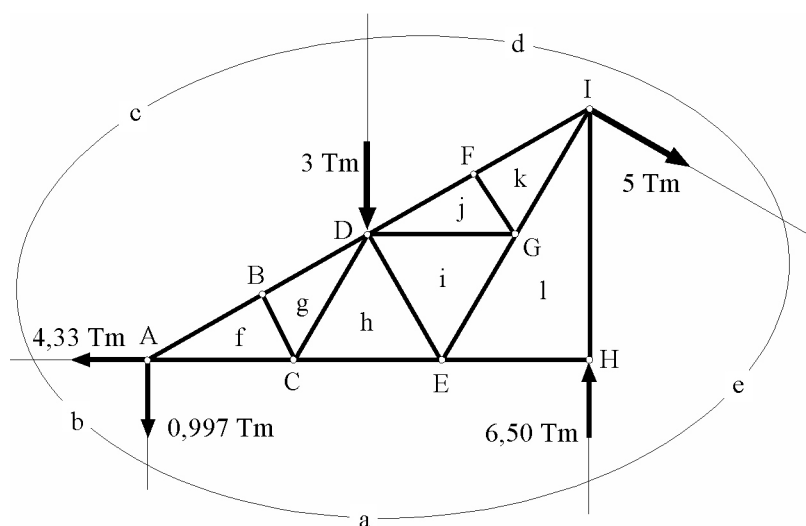


Figura 2.59: Divisió del pla de l'estructura de l'exercici 2.16 en zones

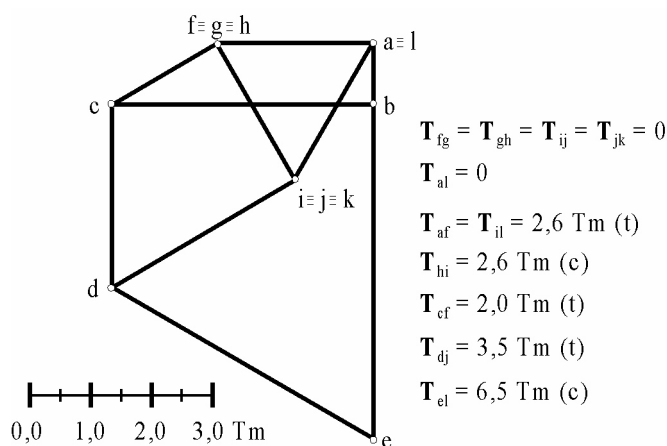


Figura 2.60: Diagrama de Maxwell-Cremona de l'exercici 2.16 i esforços en les barres (tipus i valor)

Exercici 2.17 Atés el cavall de la figura 2.15 de la pàgina 88, es demana: 1) Reaccions en els suports. 2) Esforços en les barres, analíticament. 3) Diagrama de Maxwell-Cremona.

La figura 2.61 mostra el DSL del cavall de l'exercici 2.17. S'indica la barra que no treballa per ser-ne tres concurrents en un nus on dues d'elles són col·lineals.

Les equacions d'equilibri serien:

$$\sum_{i=1}^2 F_{i_x} = 0 = R_{A_x} + 5 \cdot \cos 45^\circ \implies R_{A_x} = -3,54 \text{ Tm}$$

$$\sum_{i=1}^3 F_{i_y} = 0 = R_{A_y} + R_{B_y} - 5 \cdot \sin 45^\circ \implies R_{A_y} + R_{B_y} = 5 \cdot \sin 45^\circ \text{ Tm}$$

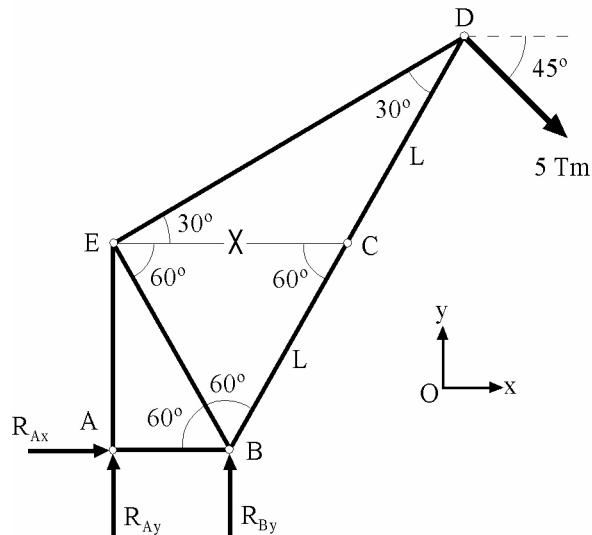


Figura 2.61: DSL del cavall de l'exercici 2.17. La barra que no treballa també s'indica

i prenent moments respecte del punt B, sent positiu els que tenen el moviment de les agulles del rellotge, s'obtidria:

$$\sum_{i=1}^2 M_{i_B} = 0 = R_{A_y} \cdot L \cdot \cos 60^\circ + 5 \cdot 2L \cdot \sin 75^\circ \Rightarrow R_{A_y} = -19,32 \text{ Tm}$$

Substituint aquest resultat en l'equació anterior, s'obtidria que la reacció en B val $R_{B_y} = 22,90 \text{ Tm}$.

L'obtenció dels esforços analíticament es fa mitjançant el mètode dels nusos. La figura 2.62 mostra el DSL de cada nus analitzat en la resolució d'aquest exercici, indicant el sentit dels esforços emprats per a obtenir les equacions de l'equilibri. Comencem el procediment pel nus A, part superior esquerra de la figura 2.62, obtenint de forma trivial que les barres AB i AE treballen a tracció: $T_{AB} = 3,54 \text{ Tm}$ $T_{AE} = 19,32 \text{ Tm}$.

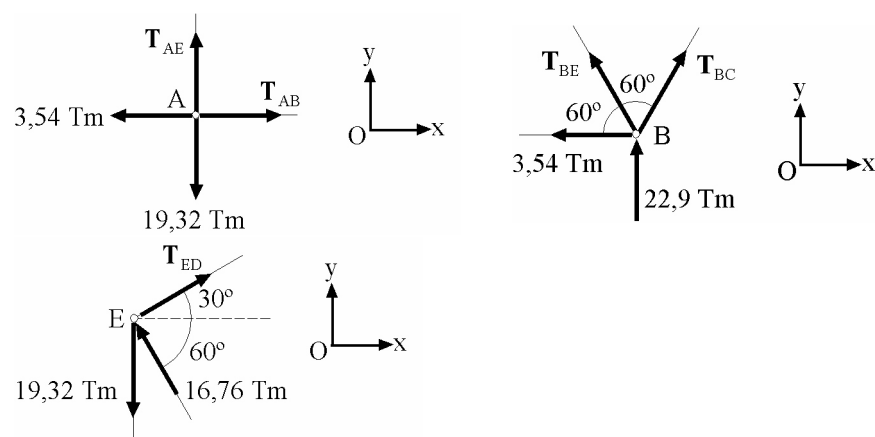


Figura 2.62: DSL dels nusos resoltos de l'exercici 2.17

Continuem el mètode dels nusos resolent ara el nus B (part superior dreta en la figura 2.62):

$$\sum_{i=1}^3 F_{ix} = 0 = -3,54 - T_{BE} \cdot \cos 60^\circ + T_{BC} \cdot \cos 60^\circ$$

$$\sum_{i=1}^3 F_{iy} = 0 = 22,90 + T_{BE} \cdot \sin 60^\circ - T_{BC} \cdot \sin 60^\circ$$

Resolent les dues equacions obtindríem els resultats següents:

$$T_{BE} = -16,76 \text{ Tm}; \quad T_{BC} = -9,63 \text{ Tm}$$

Les barres BE i BC treballen a compressió (sentit contrari al dibuixat). Per al nus E (part inferior en la figura 2.58):

$$\sum_{i=1}^2 F_{ix} = 0 = -16,76 \cdot \cos 60^\circ + T_{ED} \cdot \cos 30^\circ \implies T_{ED} = 9,61 \text{ Tm}$$

La barra ED treballa a tracció.

En la figura 2.63 s'assenyalen les zones interiors i exteriors on s'assigna una lletra minúscula seguint la notació de Bow.

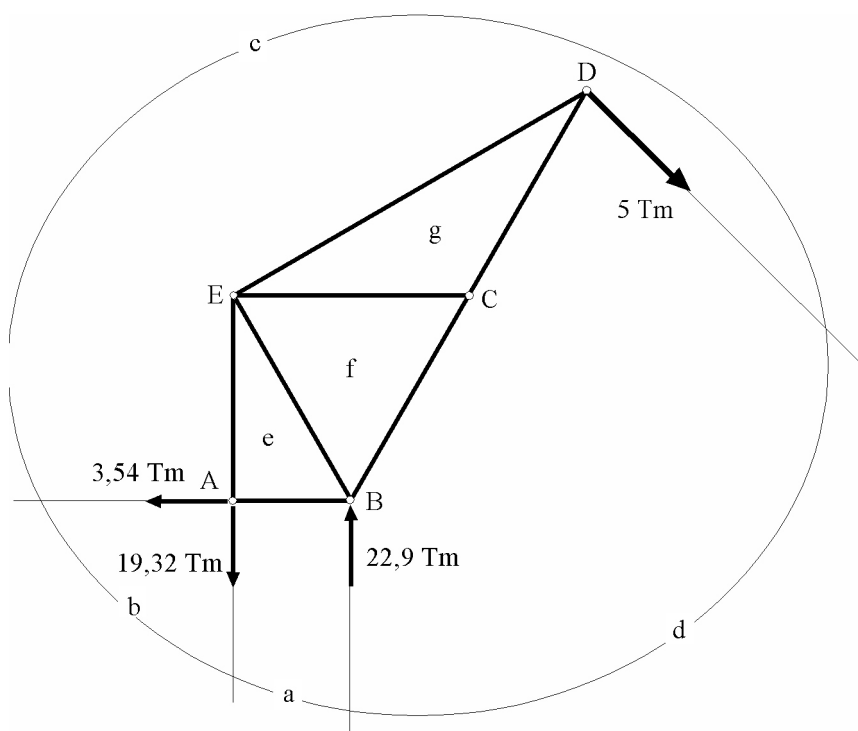


Figura 2.63: Divisió del pla del cavall de l'exercici 2.17 en zones

En la figura 2.64 es mostra el diagrama de Maxwell-Cremona on s'indica l'escala de forces utilitzada. En aquesta figura s'indica el valor de l'esforç en cada barra, on ja estan indicades les barres que no treballen, i el tipus d'esforç de cada barra, a tracció (t) o a compressió (c). Quan les zones que defineixen una barra concorren en un punt vol dir que aquesta no treballa.

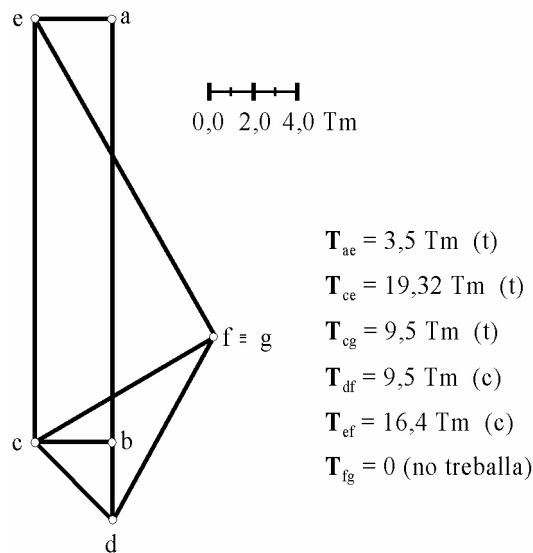


Figura 2.64: Diagrama de Maxwell-Cremona de l'exercici 2.17 i esforços en les barres (tipus i valor)

Exercici 2.18 Atesa l'estructura de la figura 2.16 de la pàgina 89, es demana: 1) Reaccions en els suports. 2) Esforços en les barres. Resoleu aquest apartat analíticament i pel diagrama de Maxwell-Cremona.

La figura 2.65 mostra el DSL de l'estructura de l'exercici 2.18. S'indiquen les barres que no treballen per ser-ne tres concurrents en un nus on dues d'elles són col·lineals.

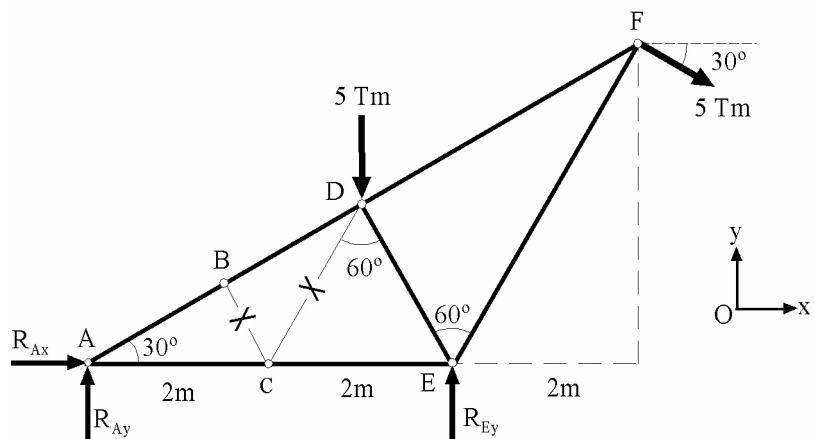


Figura 2.65: DSL de l'estructura de l'exercici 2.18. Les barres que no treballen també s'indiquen

Les equacions d'equilibri, on s'han pres moments respecte del punt B, sent positius els que tenen el moviment de les agulles del rellotge, són:

$$\sum_{i=1}^2 F_{ix} = 0 = R_{Ax} + 5 \cdot \cos 30^\circ \implies R_{Ax} = -4,33 \text{ Tm}$$

$$\sum_{i=1}^4 F_{i_y} = 0 = R_{A_y} - 5 - 5 \cdot \sin 30^\circ + R_{E_y} \Rightarrow R_{A_y} + R_{E_y} = 7,50 \text{ Tm}$$

$$\sum_{i=1}^3 M_{i_B} = 0 = R_{A_y} \cdot 4 - 5 \cdot 4 + 5 \cdot 1$$

Resolent el sistema d'equacions anterior, on s'ha aplicat que la longitud de la barra EF és $\sqrt{(6 \cdot \tan 30^\circ)^2 + 2^2} = 4 \text{ m}$, s'obtidrien les solucions següents:

$$R_{A_y} = -3,75 \text{ Tm}; \quad R_{E_y} = 11,25 \text{ Tm}$$

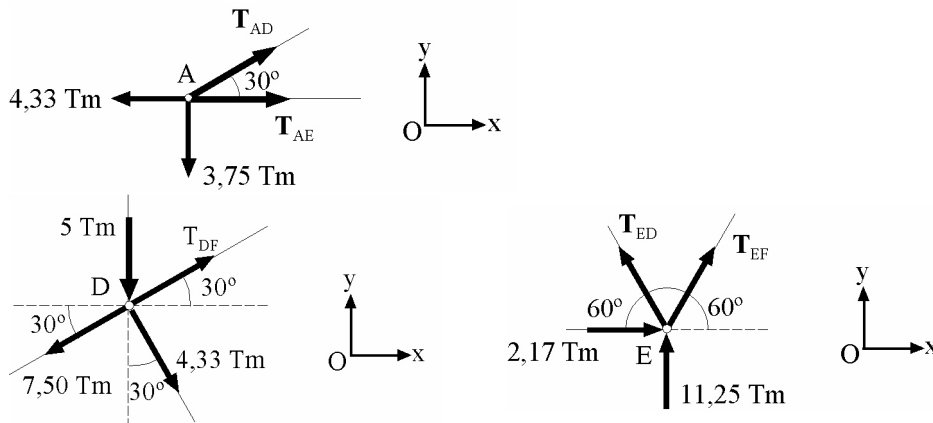


Figura 2.66: DSL dels nusos resolts de l'exercici 2.18

L'obtenció dels esforços analíticament es fa mitjançant el mètode dels nusos. La figura 2.66 mostra el DSL de cada nus analitzat en la resolució d'aquest exercici, indicant el sentit dels esforços emprats per a obtenir les equacions de l'equilibri. Comencem aquesta anàlisi per un nus on no hi haja més de dos esforços desconeguts, com ara el nus A (part superior de la figura 2.66).

$$\sum_{i=1}^3 F_{i_x} = 0 = -4,33 + T_{AD} \cdot \cos 30^\circ + T_{AE} \Rightarrow T_{AE} = -2,17 \text{ Tm}$$

$$\sum_{i=1}^2 F_{i_y} = 0 = -3,75 + T_{AD} \cdot \sin 30^\circ \Rightarrow T_{AD} = 7,5 \text{ Tm}$$

Aquests resultats indiquen que la barra AD treballa a tracció i la barra AE treballa a compressió.

Continuem el mètode dels nusos resolent ara el nus E (part inferior dreta en la figura 2.66):

$$\sum_{i=1}^3 F_{i_x} = 0 = 2,17 - T_{ED} \cdot \cos 60^\circ + T_{EF} \cdot \cos 60^\circ$$

$$\sum_{i=1}^3 F_{i_y} = 0 = 11,25 + T_{ED} \cdot \sin 60^\circ - T_{EF} \cdot \sin 60^\circ$$

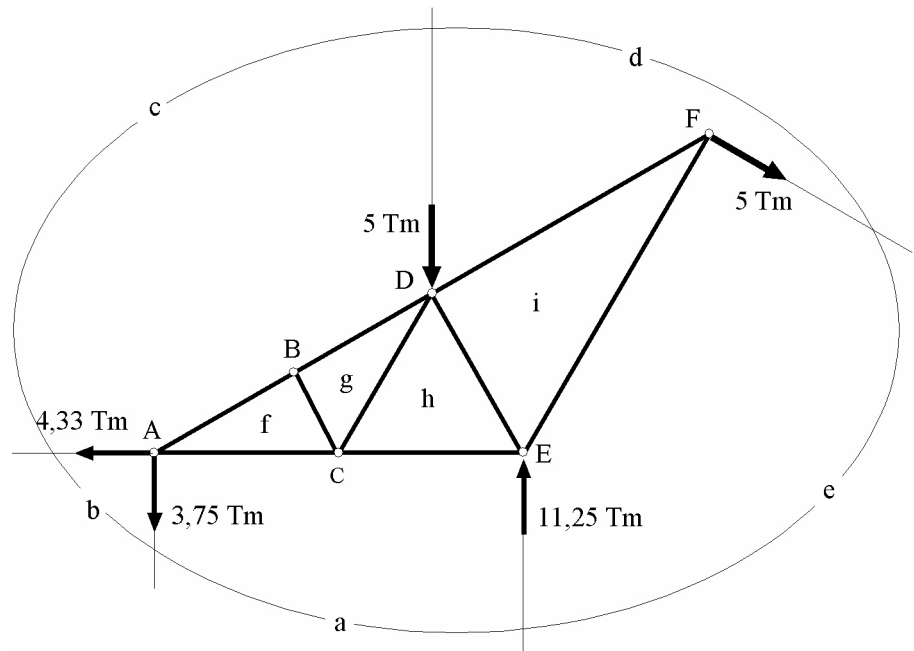


Figura 2.67: Divisió del pla de l'estructura de l'exercici 2.18 en zones

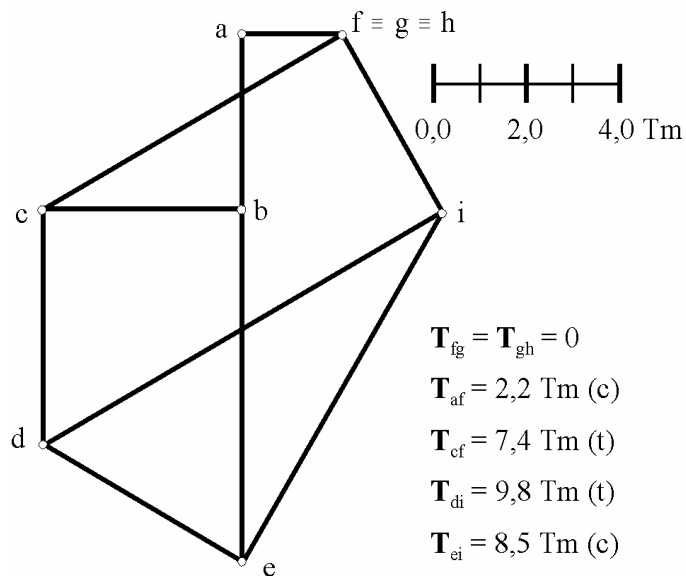


Figura 2.68: Diagrama de Maxwell-Cremona de l'exercici 2.18 i esforços en les barres (tipus i valor)

Resolent les dues equacions obtindríem els resultats següents:

$$T_{ED} = -4,33 \text{ Tm}; \quad T_{EF} = -8,67 \text{ Tm}$$

Les barres BE i BC treballen a compressió (sentit contrari al dibuixat). Per al nus D (part inferior esquerra en la figura 2.66):

$$\sum_{i=1}^3 F_{i_x} = 0 = -7,5 \cdot \cos 30^\circ + T_{DF} \cdot \cos 30^\circ + 4,33 \cdot \cos 60^\circ \Rightarrow T_{DF} = 10,0 \text{ Tm}$$

La barra DF treballa a tracció.

En la figura 2.67 s'assenyalen les zones interiors i exteriors on s'assigna una lletra minúscula seguint la notació de Bow.

En la figura 2.68 es mostra el diagrama de Maxwell-Cremona on s'indica l'escala de forces utilitzada. En aquesta figura s'indica el valor de l'esforç en cada barra, on ja estan indicades les barres que no treballen, i el tipus d'esforç de cada barra, a tracció (t) o a compressió (c). Quan les zones que defineixen una barra concorren en un punt vol dir que aquesta no treballa.

Exercici 2.19 La figura 2.17 de la pàgina 90 mostra un entramat en volada amb dos suports. Les càrregues corresponen al pes de la coberta. Es demana: 1) Reaccions en els suports. 2) Esforços en les barres (valor i tipus).

La figura 2.69 mostra el DSL de l'entramat en volada d'aquest exercici. Com que totes les càrregues són verticals, les reaccions en els suports també ho són. És a dir, la component horitzontal de la reacció en el nus A és nul·la, $R_{Ax} = 0$ kN.

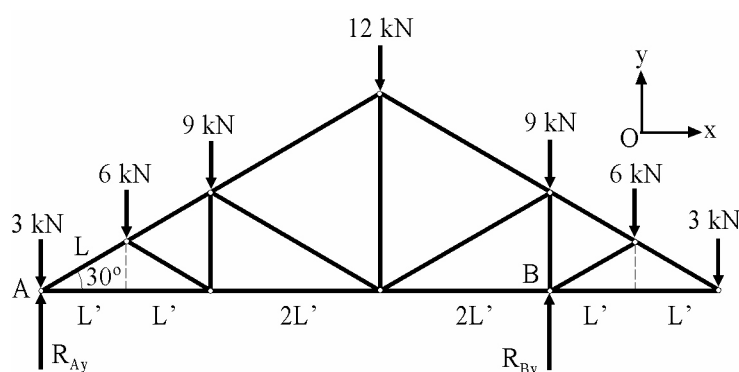


Figura 2.69: DSL de l'entramat en volada de l'exercici 2.19

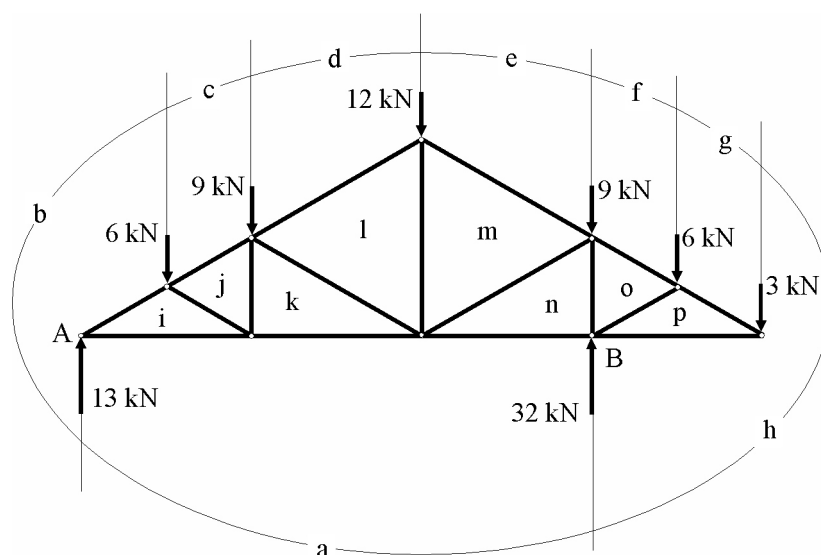


Figura 2.70: Divisió del pla de l'entramat de l'exercici 2.19 en zones

Prenent moments respecte del punt A, sent positius els que tenen el sentit de les agulles del rellotge, i prenent el sistema equivalent de les càrregues

exterior igual a una resultant de 48 kN aplicada en el centre de l'entramat, les equacions de l'equilibri serien:

$$\sum_{i=1}^3 F_{i_y} = 0 = R_{A_y} + R_{B_y} - 48 \implies R_{A_y} + R_{B_y} = 48 \text{ kN}$$

$$\sum_{i=1}^2 M_{i_A} = 0 = R_{A_y} \cdot 4 \cdot L' - R_{B_y} \cdot 6 \cdot L'$$

Resolent aquest sistema d'equacions, s'obtindrien els valors següents:

$$R_{A_y} = 16 \text{ kN}; R_{B_y} = 32 \text{ kN}$$

L'obtenció dels esforços, valor i tipus, es farà pel mètode de Maxwell-Cremona. En la figura 2.70 s'indiquen les zones exteriors i interiors de l'entramat. Cal indicar que la càrrega/reacció en el nus A s'ha substituït per la seua resultant parcial $16 - 3 = 13 \text{ kN}$.

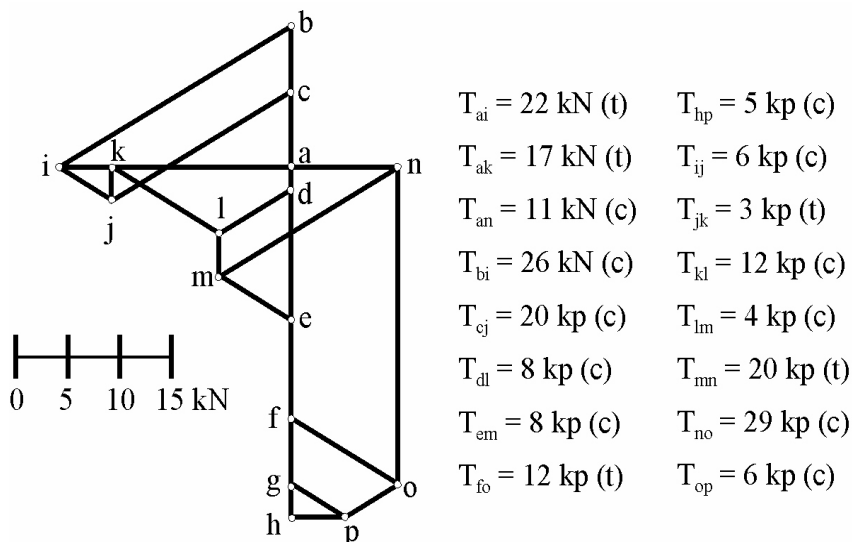


Figura 2.71: Diagrama de Maxwell-Cremona de l'exercici 2.19 i esforços en les barres (tipus i valor)

En la figura 2.71 es mostra el diagrama de Maxwell-Cremona on s'indica l'escala de forces utilitzada. En aquesta figura s'indica el valor de l'esforç en cada barra i el tipus d'esforç de cada barra, a tracció (t) o a compressió (c).

Exercici 2.20 Atesa l'estructura articulada plana de la figura 2.18 de la pàgina 90, es demana: 1) Reaccions en els suports. 2) Esforços en les barres (valor i tipus). És recomanable l'ús del mètode de Cremona

La figura 2.72 representa el DSL de l'estructura articulada plana d'aquest exercici. Com que totes les càrregues són verticals, l'única component horitzontal que actua sobre l'armadura és la component x de la reacció en A, resulta obvi que R_{A_x} és nul·la. És a dir, les reaccions també seran verticals.

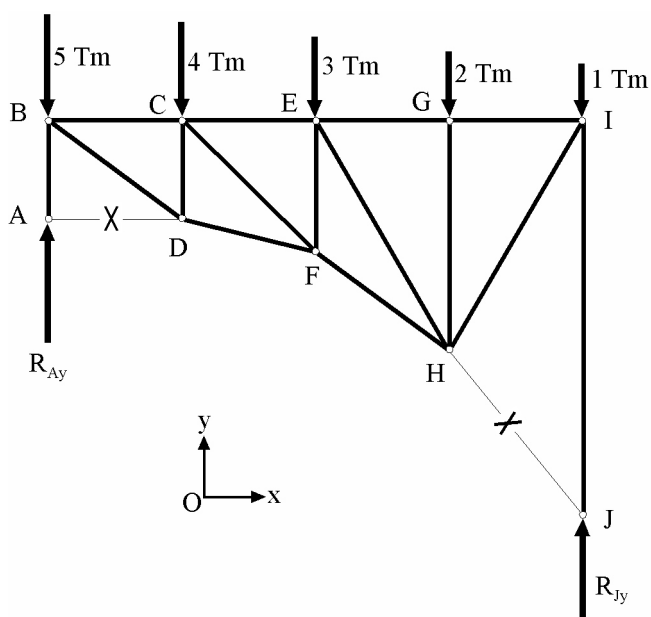


Figura 2.72: DSL de l'estructura articulada plana de l'exercici 2.20. També s'indiquen les barres que no treballen

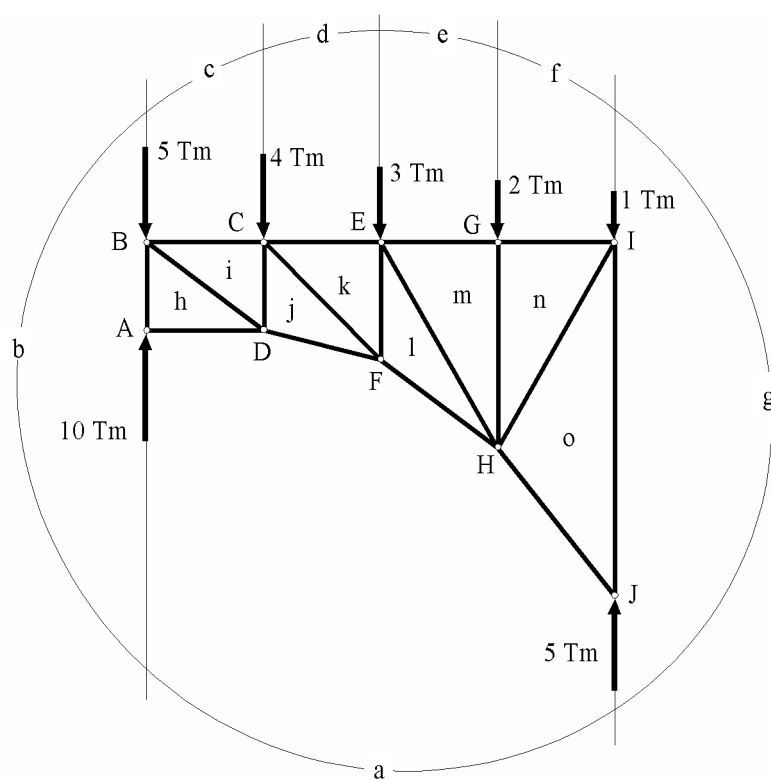


Figura 2.73: Divisió del pla de l'estructura articulada de l'exercici 2.20 en zones

Prenent moments respecte del punt A, sent positius els que tenen el sentit de les agulles del rellotge, les equacions de l'equilibri quedarien de la forma següent:

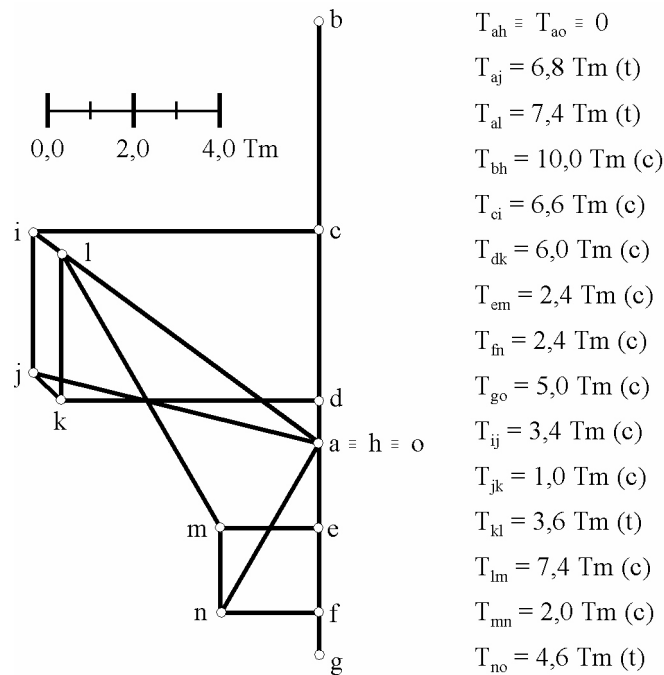


Figura 2.74: Diagrama de Maxwell-Cremona de l'exercici 2.20 i esforços en les barres (tipus i valor)

$$\sum_{i=1}^7 F_{i_y} = 0 = R_{A_y} - 5 - 4 - 3 - 2 - 1 + R_{J_y}$$

$$\sum_{i=1}^3 M_{i_A} = 0 = 4 \cdot 4 + 3 \cdot 8 + 2 \cdot 12 + 1 \cdot 16 - R_{J_y} \cdot 16$$

Els valors que s'obtenen per a les reaccions en els suports són:

$$R_{A_y} = 10 \text{ Tm}; R_{J_y} = 5 \text{ Tm}$$

L'obtenció dels esforços, valor i tipus, es farà pel mètode de Maxwell-Cremona. En la figura 2.73 s'indiquen les zones exteriors i interiors de l'estructura articulada plana.

En la figura 2.74 es mostra el diagrama de Maxwell-Cremona on s'indica l'escala de forces utilitzada. En aquesta figura s'indica el valor de l'esforç en cada barra i el tipus d'esforç de cada barra, a tracció (t) o a compressió (c).

Exercici 2.21 En la figura 2.19 de la pàgina 91 es mostra de forma esquematitzada, la ploma d'una grua tipus derrick. El suport en A és fix i sobre el nus B actua un cable amb una tensió T. La càrrega Q, que actua sobre el nus I, val 35 Tm. Es demana: 1) Reacció en A i tensió T en el cable. 2) Esforços en les barres (tipus i magnituds) utilitzant el Diagrama de Maxwell-Cremona.

El DSL de la ploma es mostra en la figura 2.75. A partir dels angles que formen les barres de la ploma, es pot establir que l'angle que forma la tensió T

amb l'horitzontal és de 15° . La longitud de la barra AB també es pot deduir a partir del teorema de Pitàgores i val $5 \cdot \sqrt{2}$ m.

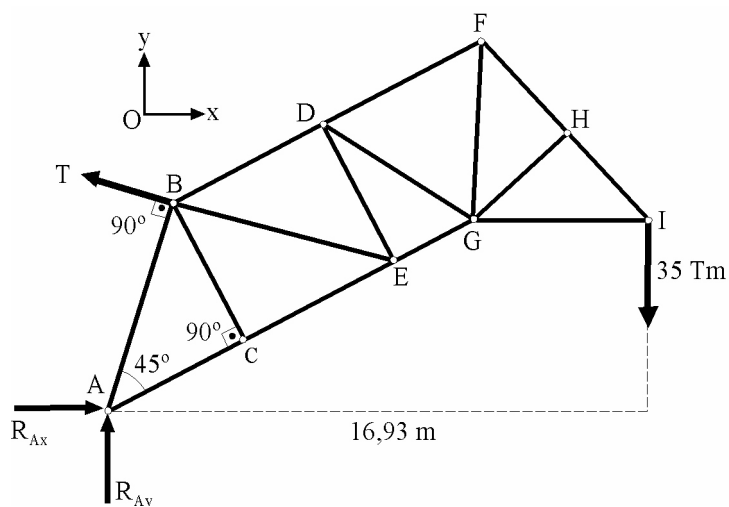


Figura 2.75: DSL de la ploma de l'exercici 2.21

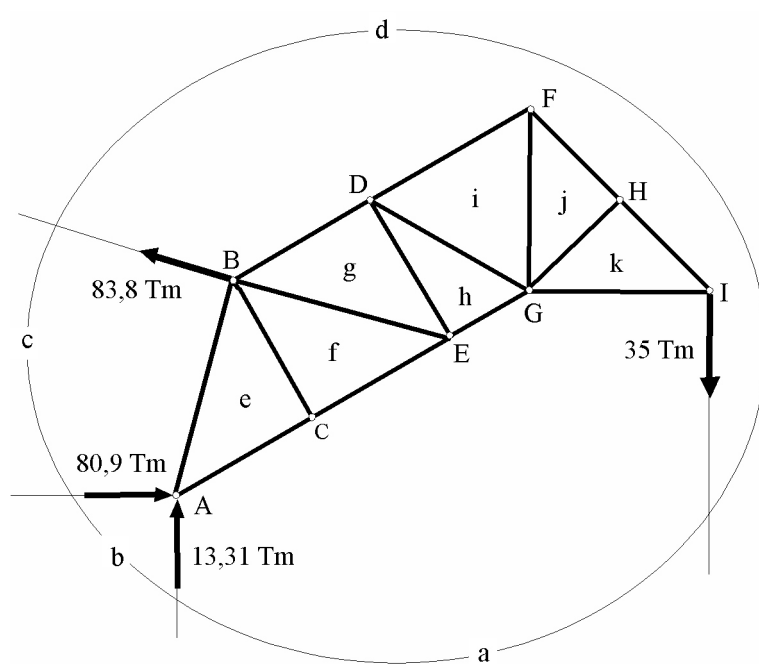


Figura 2.76: Divisió del pla de la ploma de l'exercici 2.21 en zones

Les condicions d'equilibri serien:

$$\sum_{i=1}^2 F_{i_x} = 0 = R_{Ax} - T \cdot \cos 15^\circ$$

$$\sum_{i=1}^3 F_{i_y} = 0 = R_{Ay} + T \cdot \sin 15^\circ - 35$$

$$\sum_{i=1}^2 M_{i_A} = 0 = T \cdot 5 \cdot \sqrt{2} - 35 \cdot 16,93$$

sistema que donaria les solucions següents:

$$R_{Ax} = 80,9 \text{ kN}; R_{Ay} = 13,31 \text{ kN}; T = 83,8 \text{ kN}$$

L'obtenció dels esforços, tipus i magnituds, es farà pel mètode de Maxwell-Cremona. En la figura 2.76 s'indiquen les zones exteriors i interiors de la ploma. no s'han assenyalat les barres que se sap a priori que no treballen.

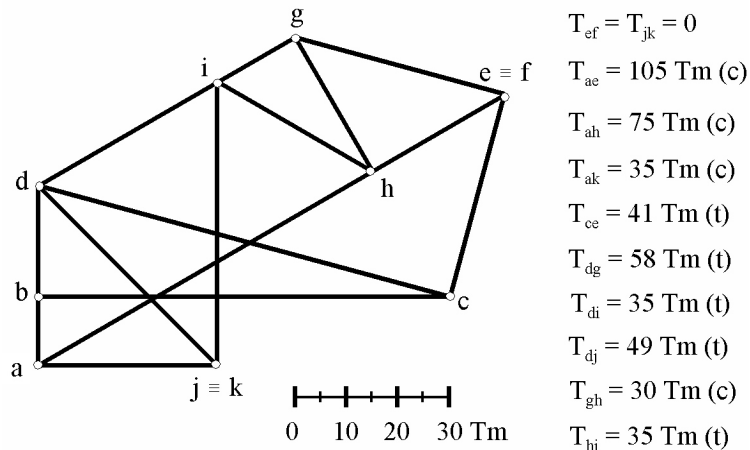


Figura 2.77: Diagrama de Maxwell-Cremona de l'exercici 2.21 i esforços en les barres (tipus i magnituds)

En la figura 2.77 es mostra el diagrama de Maxwell-Cremona on s'indica l'escala de forces utilitzada. En aquesta figura s'indica el valor de l'esforç en cada barra i el tipus d'esforç de cada barra, a tracció (t) o a compressió (c). Quan els punts que defineixen una barra de la ploma coincideixen, això implica que aquesta no treballa.

Exercici 2.22 En la figura 2.20 de la pàgina 91 es mostra una estructura plana destinada a suportar tres campanes d'un carilló els pesos de les quals són $C_1 = 1000 \text{ kp}$; $C_2 = 600 \text{ kp}$ i $C_3 = 400 \text{ kp}$. Cada campana es troba unida al nus que s'indica. Es demana:

1. Reaccions en els suports.
2. Esforços en les barres (valor i signe). Resoleu-ho analíticament i gràficament.
3. Valor de la deformació màxima, indicant en quina barra té lloc, si la secció de les barres és de 5 cm^2 i el material té un mòdul de Young de $2 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$.

Els triangles que formen l'estructura articulada plana d'aquest exercici són equilàters el costat dels quals mesura una longitud L . La figura 2.78 mostra el diagrama de sòlid lliure de l'estructura.

Com que només tenim càrregues verticals, les reaccions en els suports han de ser verticals i, per tant, les equacions d'equilibri serien:

$$\sum_{i=1}^3 F_{iy} = 0 = R_A + R_E - 2000$$

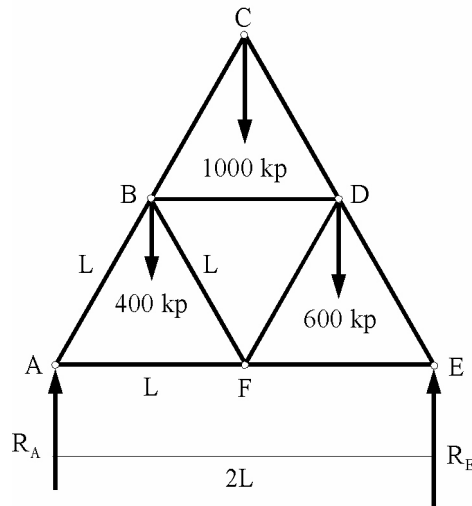


Figura 2.78: DSL de l'estructura de l'exercici 2.22

i prenent moments respecte del punt A, sent positiu els que tenen el moviment de les agulles del rellotge, s'obté:

$$\sum_{i=1}^4 M_{i_A} = 0 = 400 \cdot L/2 + 1000 \cdot L + 600 \cdot 3L/2 - R_E \cdot 2L$$

Resolent el sistema d'equacions anterior, s'obtenen les solucions següents:

$$R_A = 950 \text{ kp}; \quad R_E = 1050 \text{ kp}.$$

A continuació analitzarem l'entramat nus a nus, mètode analític, començant per un on no hi haja més de dos esforços desconeguts, com ara el nus A. Per ser sistemes de forces concurrents, la condició d'equilibri és que la resultant siga zero. La figura 2.79 mostra el DSL de tots els nusos de l'estructura amb el sentit dels esforços emprats per a obtenir les equacions de l'equilibri.

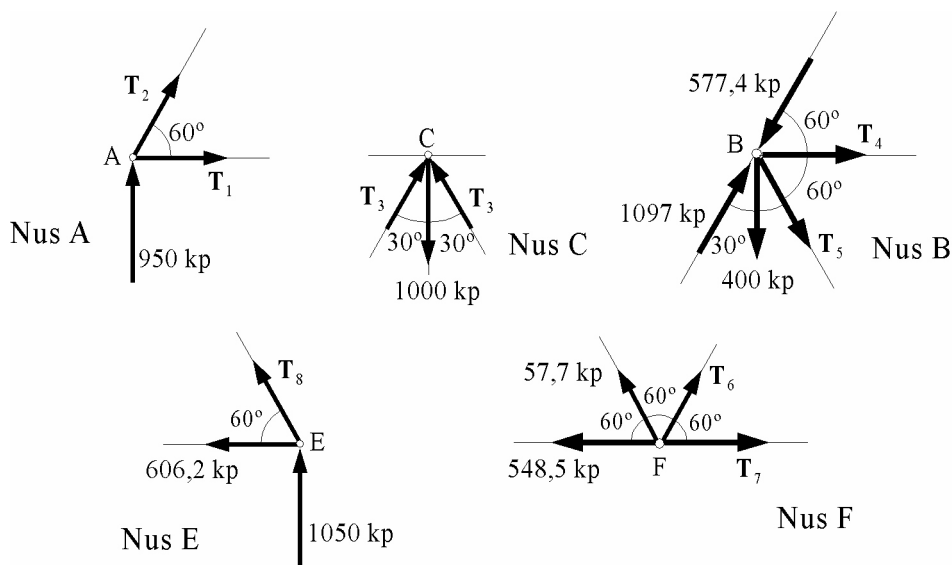


Figura 2.79: Anàlisi de tots els nusos de l'estructura de l'exercici 2.22

$$\sum_{i=1}^2 F_{i_x} = 0 = T_1 + T_2 \cdot \cos 60^\circ \implies T_1 = 548,5 \text{ kp}$$

$$\sum_{i=1}^2 F_{i_y} = 0 = T_2 \cdot \sin 60^\circ + 950 \implies T_2 = -1097 \text{ kp}$$

Aquests resultats indiquen que la barra AB treballa a compressió (ja que ha resultat negatiu el valor obtingut, per tant, de sentit contrari al dibuixat en la part superior esquerra de la figura 2.79) i la barra AF a tracció, tal com s'havia suposat.

Continuem el mètode dels nusos resolent ara el nus C:

$$\sum_{i=1}^2 F_{i_y} = 0 = 2 \cdot T_3 \cdot \cos 30^\circ - 1000 \implies T_3 = 577,4 \text{ kp}$$

Com es pot veure, les barres BC i CD treballen a compressió, tal com s'havia suposat. Per al nus B:

$$\sum_{i=1}^4 F_{i_x} = 0 = 1097 \cdot \cos 60^\circ - 577,4 \cdot \cos 60^\circ + T_4 + T_5 \cdot \cos 60^\circ$$

$$\sum_{i=1}^4 F_{i_y} = 0 = 1097 \cdot \sin 60^\circ - 577,4 \cdot \sin 60^\circ - T_5 \cdot \sin 60^\circ - 400$$

Resolent les dues equacions obtindríem els resultats següents:

$$T_4 = -288,7 \text{ kp}; \quad T_5 = 57,7 \text{ kp}$$

La barra BD treballa a compressió (sentit contrari al dibuixat) i la barra BF treballa a tracció. Per al nus F:

$$\sum_{i=1}^4 F_{i_x} = 0 = -548,5 - 57,7 \cdot \cos 60^\circ + T_6 \cdot \cos 60^\circ + T_7$$

$$\sum_{i=1}^2 F_{i_y} = 0 = 57,7 \cdot \sin 60^\circ + T_6 \cdot \sin 60^\circ$$

Resolent les dues equacions obtindríem els resultats següents:

$$T_6 = -57,7 \text{ kp}; \quad T_7 = 606,2 \text{ kp}$$

La barra DF treballa a compressió (sentit contrari al dibuixat) i la barra EF treballa a tracció. Per al nus E:

$$\sum_{i=1}^2 F_{i_x} = 0 = -606,2 - T_8 \cdot \cos 60^\circ \implies T_8 = -1212 \text{ kp}$$

$$\sum_{i=1}^2 F_{i_y} = 0 = T_8 \cdot \sin 60^\circ + 1050 \implies T_8 = -1212 \text{ kp}$$

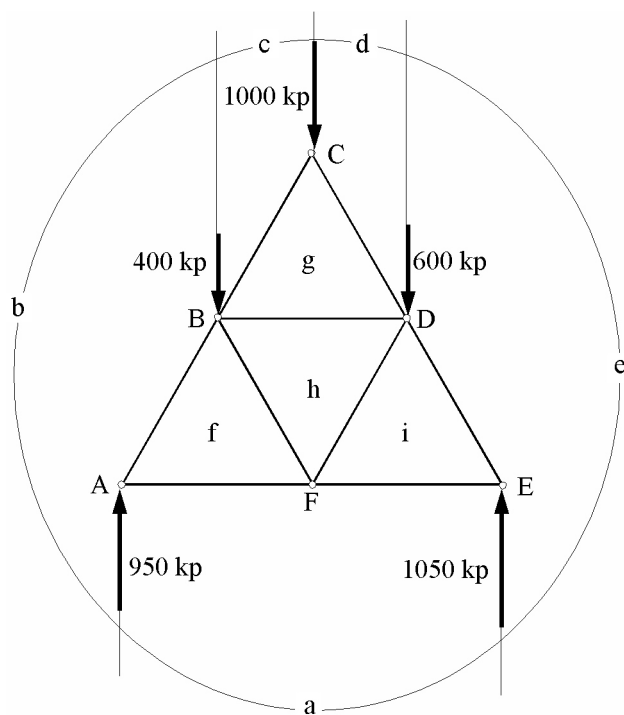


Figura 2.80: Divisió del pla de l'estructura de l'exercici 2.22 en zones d'acord amb la notació de Bow

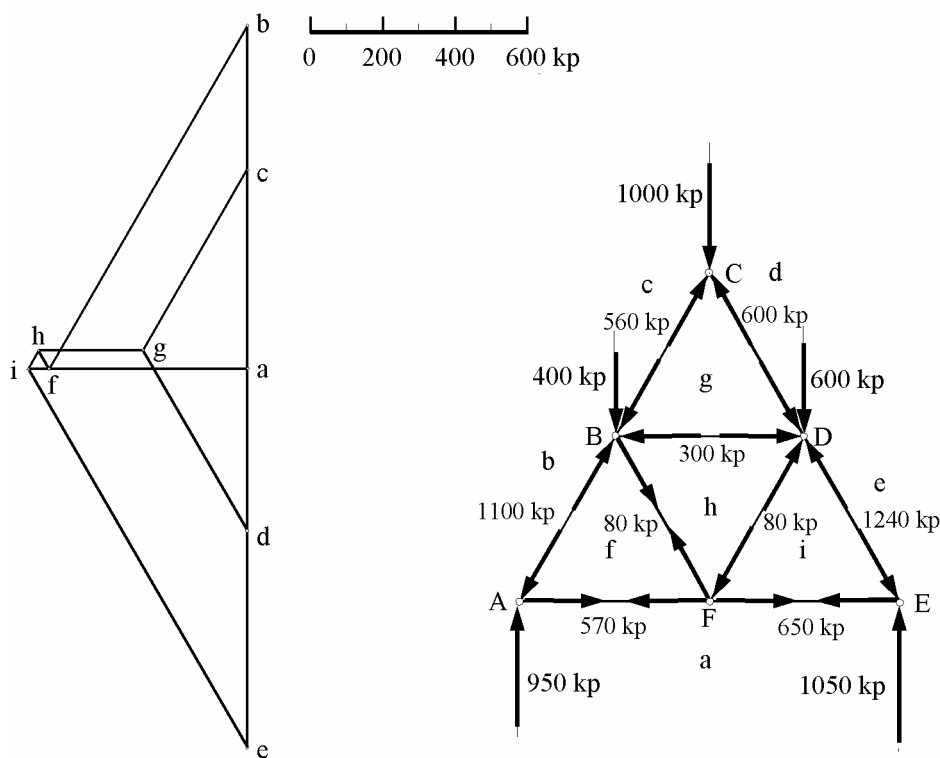


Figura 2.81: Diagrama de Maxwell-Cremona de l'estructura de l'exercici 2.22

La barra DE treballa a compressió (sentit contrari al dibuixat). Atès que ja es coneixen tots els valors de tots els esforços, l'aplicació de les condicions

d'equilibri en el nus D pot utilitzar-se per a confirmar que els valors que s'han calculat anteriorment són correctes.

La resolució gràfica pel mètode de Maxwell-Cremona consisteix a reunir els polígons de forces tancats de tots els nusos, fent coincidir els costats dels polígons que corresponen a les mateixes forces. El primer pas per a la seua obtenció és dividir el pla de l'estructura en zones i anomenar-les amb lletres minúscules (figura 2.80). D'acord amb l'escala de tensions que s'indica en la figura 2.81, es construeix el diagrama de Cremona d'aquesta estructura. En la part inferior dreta de la mateixa figura es mostren els sentits de les tensions en cadascun dels nusos, així com el seu valor aproximat, deduït de l'escala de forces utilitzada.

Finalment, la barra que està sotmesa a major tensió és la i-e en el diagrama de Cremona, o barra DE, T_8 , en l'anàlisi per nusos. Com $\sigma_{màx} = E \cdot \epsilon_{màx}$, el valor de la deformació màxima serà:

$$\epsilon_{màx} = \frac{\sigma_{màx}}{E} = \frac{F_{màx}}{S \cdot E} = \frac{1\,212 \cdot 9,8}{5 \cdot 10^{-4} \cdot 2 \cdot 10^{11}} = 1,12 \cdot 10^{-4}$$

o en percentatge el 0,012%. La deformació màxima absoluta s'obtindria com $\Delta L = \epsilon_{màx} \cdot L$.

Exercici 2.23 La figura 2.21 de la pàgina 92 mostra una armadura d'estisores, utilitzada per a suportar una teulada a dues aigües. Calculeu: 1) Reaccions en els suports. 2) Tensions en les barres (valor i tipus). 3) Si la secció de les barres és de 10 cm^2 i estan fetes de ferro (mòdul de Young $\equiv E = 2 \times 10^{11} \text{ Pa}$), es demana en quina barra és l'esforç màxim i en quina és mínim.

Per a calcular les reaccions en els suports, es dibuixa el DSL d'aquesta armadura d'estisores, que es mostra en la figura 2.82. S'assenyala la barra que no treballa (ED).

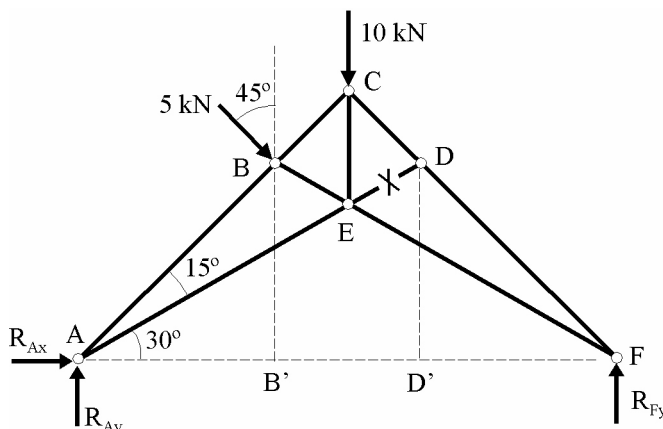


Figura 2.82: DSL de l'armadura d'estisores de l'exercici 2.23. La barra que no treballa també s'indica

Prenent moments respecte del punt A, sent positius els que tenen el sentit de les agulles del rellotge, les equacions de l'equilibri quedarien de la forma següent:

$$\sum_{i=1}^2 F_{i_x} = 0 = R_{A_x} + 5 \cdot \sin 45^\circ \implies R_{A_x} = -5 \cdot \sin 45^\circ = -3,54 \text{ kN}$$

$$\sum_{i=1}^4 F_{i_y} = 0 = R_{A_y} - 5 \cdot \cos 45^\circ - 10 + R_{F_y}$$

$$\sum_{i=1}^3 M_{i_A} = 0 = 5 \cdot \overline{AB} + 10 \cdot 3 - R_{F_y} \cdot 6$$

Per a calcular \overline{AB} ens ajudem dels paràmetres $\overline{AB'} = \overline{D'P} = x$ i $\overline{DD'} = y$ (vegeu la figura 2.82). Es verifiquen les relacions següents:

$$\left. \begin{aligned} \tan 30^\circ &= \frac{\overline{DD'}}{\overline{AD'}} = \frac{\overline{DD'}}{6 - \overline{D'F}} = \frac{y}{6 - x} = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \tan 45^\circ &= \frac{\overline{BB'}}{\overline{AB'}} = \frac{\overline{DD'}}{\overline{AB'}} = \frac{y}{x} \end{aligned} \right\}$$

Resolent el sistema d'equacions anterior, s'obtenen els resultats següents:

$$x = \frac{6 \cdot \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}} = 2,20 \text{ m} \implies \overline{AB} = \frac{\overline{AB'}}{\cos 45^\circ} = 3,11 \text{ m}$$

Substituint aquest valor en l'equació d'equilibri, s'obtenen el valor de les reaccions en els suports:

$$R_{A_x} = -3,54 \text{ kN}; \quad R_{A_y} = 5,95 \text{ kN}; \quad R_{F_y} = 7,59 \text{ kN}$$

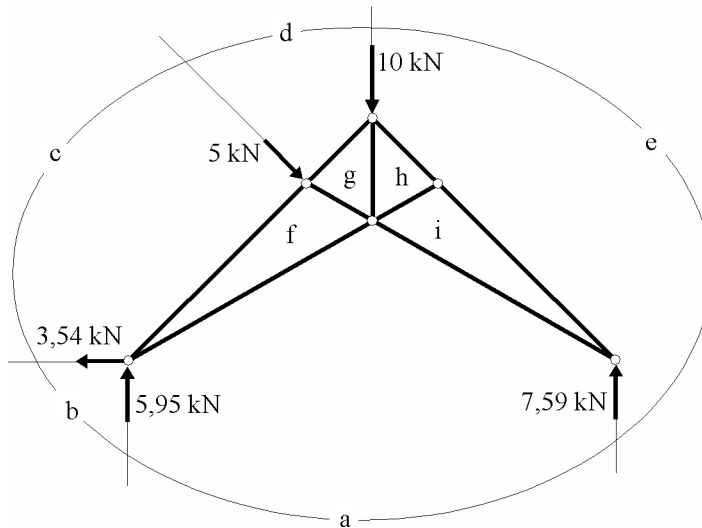


Figura 2.83: Definició de les zones de l'armadura d'estisores de l'exercici 2.23

L'obtenció dels esforços, valor i tipus, es farà pel mètode gràfic de Maxwell-Cremona. En la figura 2.83 s'indiquen les zones exteriors i interiors de l'armadura d'estisores.

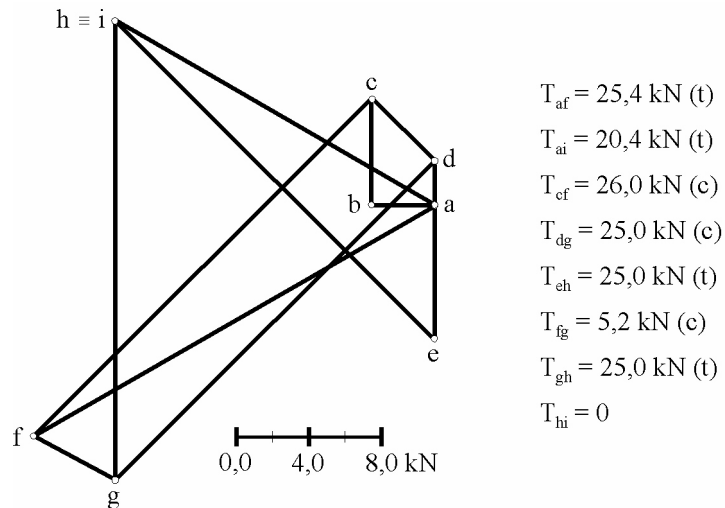


Figura 2.84: Diagrama de Maxwell-Cremona de l'exercici 2.23 i esforços en les barres (tipus i valor)

El diagrama de Maxwell-Cremona es mostra en la figura 2.84. Aquesta figura també indica l'escala de forces utilitzada i el valor i tipus dels esforços amb què treballen les barres.

Com que totes les barres tenen la mateixa secció, l'esforç màxim es produirà on la tensió (esforç) també ho és. Per tant, l'esforç màxim es dona en la barra c-f $\Rightarrow T_{cf} = 26,0 \text{ kN}$ i treballa a compressió. L'esforç mínim es produirà en la barra f-g $\Rightarrow T_{fg} = 5,2 \text{ kN}$ i també treballa a compressió.

Exercici 2.24 Un anunci de forma triangular i pes 1 000 kp es troba penjat de dos cables dels nusos E i F de l'estructura plana que mostra la figura 2.22 de la pàgina 2.22. El suport A és fix i el B és de corrons. Es demana: 1) Reaccions en els suports. 2) Esforços en les barres (valor i signe). 3) Deformació màxima en l'estructura, indicant valor i barra en què es produeix, si la secció de cada barra és de 750 mm^2 i el mòdul de Young del material val $2 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$.

Per a determinar les tensions en els dos cables que sostenen l'anunci es pot analitzar el DSL de l'anunci i plantejar les equacions d'equilibri (vegeu la figura 2.85):

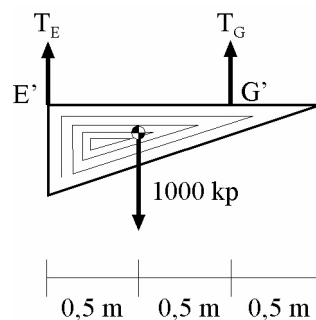
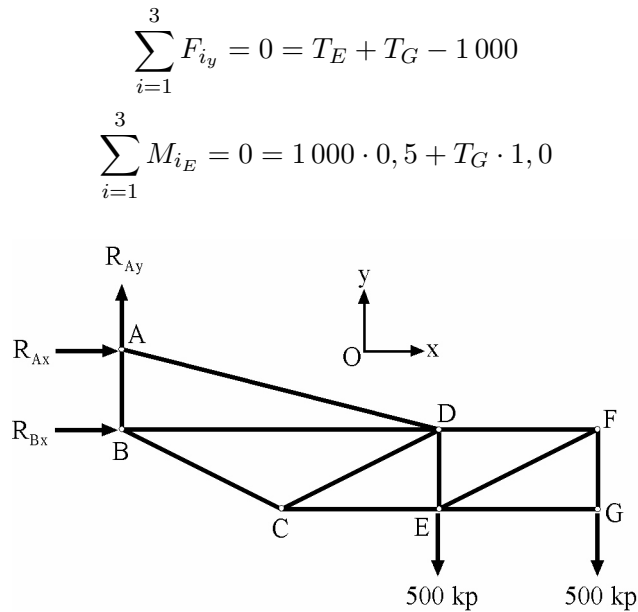


Figura 2.85: DSL de l'anunci de l'exercici 2.24

**Figura 2.86:** DSL de l'estructura plana de l'exercici 2.24

Per tant, les tensions en els cables que subjecten l'anunci són $T_E = T_G = 500$ kp. Ara, calculem les reaccions en els suports A i B. El DSL del conjunt es mostra en la figura 2.86. Aplicant les condicions d'equilibri, s'obtenen les equacions següents:

$$\sum_{i=1}^2 F_{ix} = 0 = R_{Ax} + R_{Bx} \implies R_{Ax} = -R_{Bx}$$

$$\sum_{i=1}^3 F_{iy} = 0 = R_{Ay} - 500 - 500 \implies R_{Ay} = 1\,000 \text{ kp}$$

$$\sum_{i=1}^3 M_{iA} = 0 = R_{Bx} \cdot 0,5 - 500 \cdot 2 - 500 \cdot 3 \implies R_{Bx} = 5\,000 \text{ kp}$$

Per tant, $R_{Ax} = -5\,000$ kp.

Els esforços en les barres, valor i signe, s'obtenen mitjançant el diagrama de Maxwell-Cremona. Per a això es dividirà el pla de l'estructura en les zones que s'indiquen en la figura 2.87.

El diagrama de Maxwell-Cremona es mostra en la figura 2.88 amb l'escala de forces utilitzada. També s'indiquen els tipus d'esforços en cadascuna de les barres.

La major tensió es dona en la barra d-f $\implies T_{df} = 5\,150$ kp, la longitud de la qual sense càrrega seria: $\overline{AD} = \sqrt{2^2 + 0,5^2} = \sqrt{4,25} = 2,06$ m. Aplicant la llei de Hooke, la deformació màxima en l'estructura, on la secció de les barres s'ha expressat en unitats del SI, seria:

$$\sigma_{màx} = \frac{T_{df}}{S} = E \cdot \frac{\Delta L}{L_{AD}} \implies \Delta L = \frac{T_{df} \cdot L_{AD}}{S \cdot E}$$

$$\Delta L = \frac{5\,150 \cdot 9,8 \cdot 2,06}{7,5 \cdot 10^{-4} \cdot 2 \cdot 10^{11}} = 6,93 \cdot 10^{-4} = 0,693 \text{ mm}$$

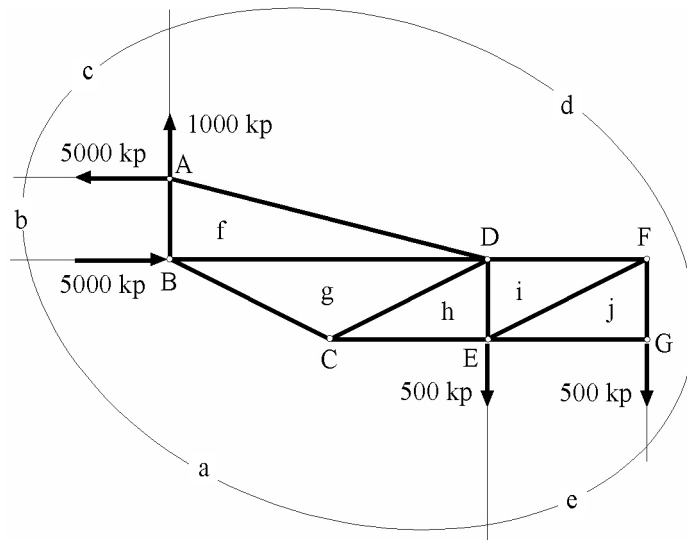
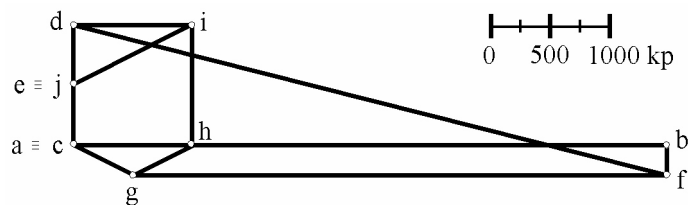


Figura 2.87: Zones en què es divideix l'estructura plana de l'exercici 2.24



$$\begin{aligned}
 T_{ag} &= 560 \text{ kp (c)} & T_{ah} &= 1000 \text{ kp (c)} & T_{bf} &= 250 \text{ kp (c)} & T_{df} &= 5150 \text{ kp (t)} \\
 T_{di} &= 1000 \text{ kp (t)} & T_{dj} &= 500 \text{ kp (t)} & T_{ej} &= 0 \text{ kp (no treballa)} \\
 T_{eh} &= 560 \text{ kp (t)} & T_{hi} &= 1000 \text{ kp (c)} & T_{ii} &= 1100 \text{ kp (c)}
 \end{aligned}$$

Figura 2.88: Diagrama de Maxwell-Cremona de l'exercici 2.24 i esforços en les barres (valor i signe)

Exercici 2.25 Atesa l'estructura que mostra la figura 2.23 de la pàgina 93, es demana: 1) Reaccions en els suports. 2) Tensions en cada barra, indicant el valor i el tipus (tracció o compressió).

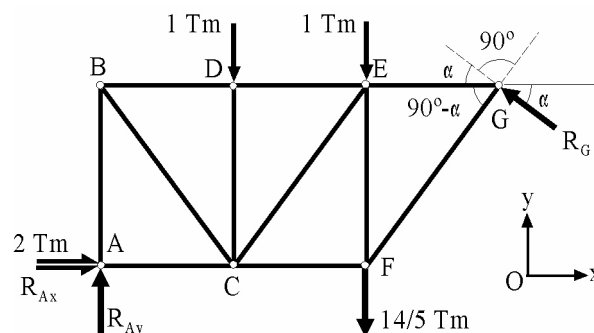


Figura 2.89: DSL de l'estructura de l'exercici 2.25

La figura 2.89 mostra el DSL de l'estructura. La càrrega repartida, de $2/3 \text{ Tm/m}$, la resultant de la qual és $2/3 \cdot 3 = 2 \text{ Tm}$, s'ha repartit sobre els nusos

D i E, amb càrregues d'1 Tm en cadascun.

La reacció en el suport de rodet G, R_G , forma un angle α amb l'horitzontal, de manera que $\alpha = \arcsin(3/5) = \arccos(4/5)$ perquè $\overline{FG} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ m.

Prenent moments respecte del punt A, sent positius els que tenen el sentit de les agulles del rellotge, les equacions de l'equilibri quedarien de la forma següent:

$$\sum_{i=1}^3 F_{i_x} = 0 = R_{A_x} + 2 - R_G \cdot \cos \alpha \implies R_{A_x} - \frac{4}{5} \cdot R_G = -2$$

$$\sum_{i=1}^5 F_{i_y} = 0 = R_{A_y} - 1 - 1 - \frac{14}{5} + R_G \cdot \sin \alpha \implies R_{A_y} + \frac{3}{5} \cdot R_G = \frac{14}{5} + 2$$

$$\sum_{i=1}^5 M_{i_A} = 0 = 1 \cdot 3 + 1 \cdot 6 + \frac{14}{5} \cdot 6 - R_G \cdot \cos \alpha \cdot 4 - R_G \cdot \sin \alpha \cdot 9$$

les solucions de les quals són:

$$R_G = 3,0 \text{ Tm}; \quad R_{A_x} = 0,4 \text{ Tm}; \quad R_{A_y} = 3,0 \text{ Tm}$$

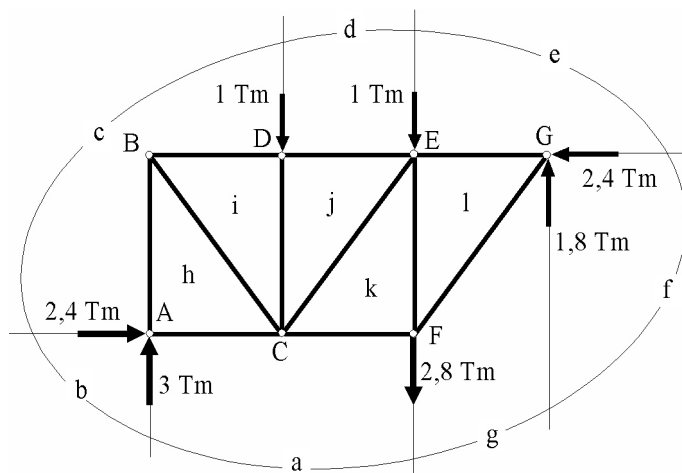


Figura 2.90: Zones en què es divideix l'estructura de l'exercici 2.25

En el nus A la resultant parcial de la component horitzontal val $2,0 + 0,4 = 2,4$ Tm. Les components horitzontal i vertical de R_G serien:

$$|R_{G_x}| = \frac{4}{5} \cdot R_G = 2,4 \text{ Tm}; \quad |R_{G_y}| = \frac{3}{5} \cdot R_G = 1,8 \text{ Tm}$$

Tenint en compte aquests resultats, la figura 2.90 mostra les zones exteriors i interiors de l'estructura. Els esforços en les barres, valor i tipus, s'obtidran mitjançant l'obtenció del diagrama de Maxwell-Cremona.

El diagrama de Maxwell-Cremona es mostra en la figura 2.91 amb l'escala de forces utilitzada. També s'indiquen els tipus d'esforços en cadascuna de les barres.

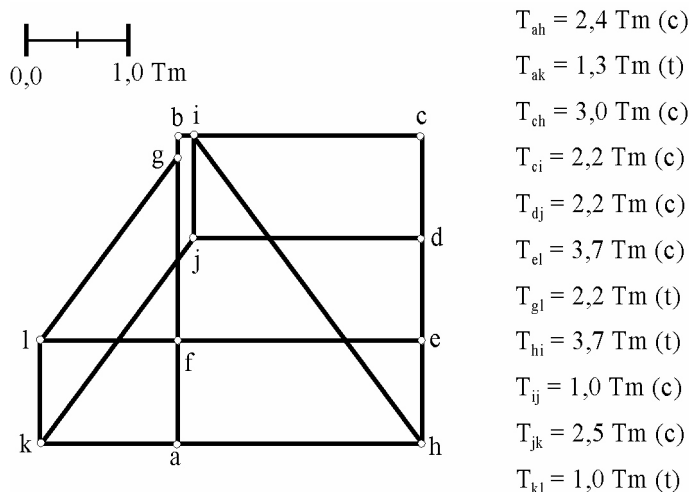


Figura 2.91: Diagrama de Maxwell-Cremona de l'exercici 2.25 i esforços en les barres (valor i signe)

Exercici 2.26 Sobre l'estructura que mostra la figura 2.24 de la pàgina 94 actua una càrrega mòbil de 600 kp, que es pot considerar puntual. La càrrega es pot moure sobre un carril de pes propi 400 kp, recolzat sobre els nusos A, B, D, F i G. Es demana que calculeu els esforços en les barres de l'estructura per a les tres situacions representatives següents:

1. La càrrega està situada en el nus A.
2. La càrrega està situada en el nus B.
3. La càrrega està situada en el nus D.

Sobre l'estructura actua una càrrega distribuïda fixa (el carril de pes propi 400 kp) i una càrrega puntual de 600 kp. La càrrega unitària del carril val 100 kp/m, que es reparteixen sobre cadascun dels nusos adjacents. Així, la càrrega sobre el nus A és de 50 kp, sobre els nusos B, D i F de 100 kp cadascun, i de 50 kp sobre el nus G. A aquestes càrregues s'haurà d'afegir la càrrega puntual en cadascuna de les situacions demanades d'aquest exercici.

D'altra banda, com que totes les càrregues que actuen sobre l'estructura són verticals, les reaccions en els suports també seran verticals. Per tant, per a les tres situacions a resoldre, la component horitzontal del suport A serà zero, $R_{Ax} = 0$ kp.

La figura 2.92 mostra el DSL per a la primera situació. Les equacions d'equilibri, prenent moments respecte del punt A i sent positius els que tenen el sentit del moviment de les agulles del rellotge, són:

$$\sum_{i=1}^7 F_{iy} = 0 = R_{Ay} - 650 - 100 - 100 - 100 - 50 + R_{Gy}$$

$$\sum_{i=1}^5 M_{iA} = 0 = 100 \cdot 1 + 100 \cdot 2 + 100 \cdot 3 + 50 \cdot 4 - R_{Gy} \cdot 4$$

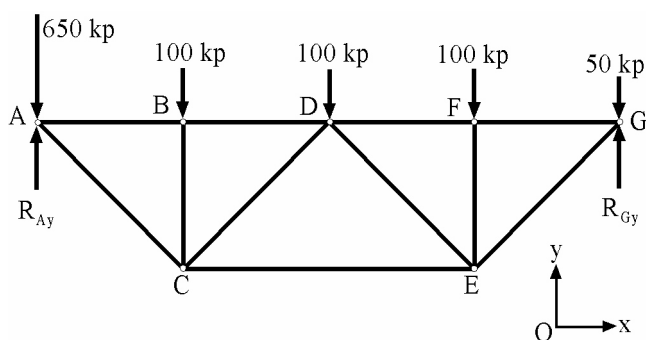


Figura 2.92: DSL de l'estructura de l'exercici 2.26 corresponent a la situació de l'apartat 1)

Resolent el sistema d'equacions anterior, s'obtingrien els resultats següents:

$$R_{Ay} = 800 \text{ kp}; \quad R_{Gy} = 200 \text{ kp}$$

L'obtenció dels esforços, valor i tipus, es farà pel mètode gràfic de Maxwell-Cremona. En la figura 2.93 s'indiquen les zones exteriors i interiors de l'estructura. Cal indicar que s'ha fet la resultant parcial vertical en el nus A ($800 - 650 = 150 \text{ kp}$) i en el nus G ($200 - 50 = 150 \text{ kp}$).

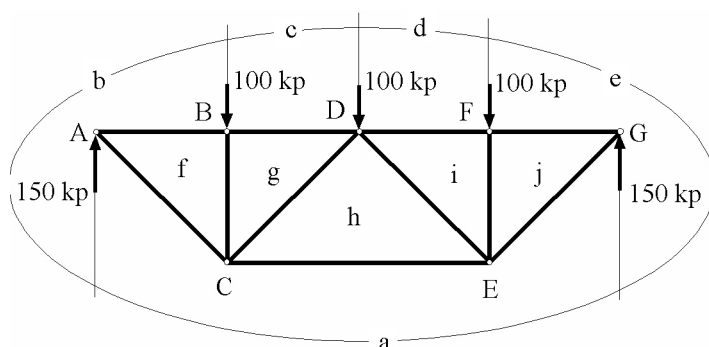


Figura 2.93: Definició de les zones de l'estructura de l'exercici 2.26 corresponent a la situació de l'apartat 1)

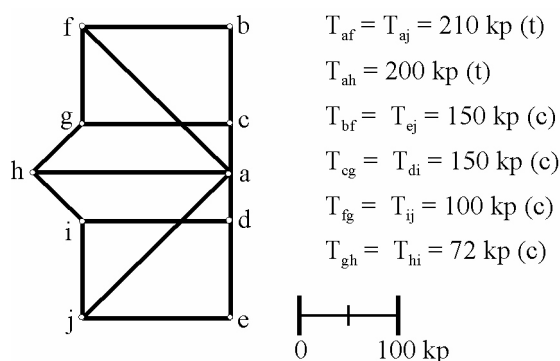


Figura 2.94: Diagrama de Maxwell-Cremona de l'exercici 2.26 i esforços en les barres (tipus i valor) corresponent a la situació de l'apartat 1)

El diagrama de Maxwell-Cremona es mostra en la figura 2.94. Aquesta figura també indica l'escala de forces utilitzada i el valor i tipus dels esforços

amb què treballen les barres.

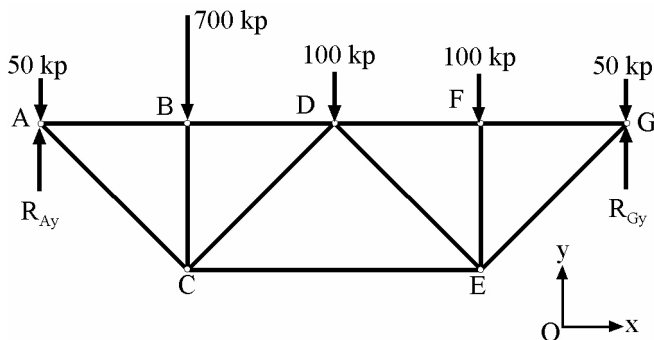


Figura 2.95: DSL de l'estructura de l'exercici 2.26 corresponent a la situació de l'apartat 2)

La figura 2.95 mostra el DSL per a la segona situació. Les equacions d'equilibri, prenent moments respecte del punt A i sent positius els que tenen el sentit del moviment de les agulles del rellotge, són:

$$\sum_{i=1}^7 F_{iy} = 0 = R_{Ay} - 50 - 700 - 100 - 100 - 50 + R_{Gy}$$

$$\sum_{i=1}^5 M_{iA} = 0 = 700 \cdot 1 + 100 \cdot 2 + 100 \cdot 3 + 50 \cdot 4 - R_{Gy} \cdot 4$$

Resolent el sistema d'equacions anterior, s'obtindrien els resultats següents:

$$R_{Ay} = 650 \text{ kp}; \quad R_{Gy} = 350 \text{ kp}$$

L'obtenció dels esforços, valor i tipus, es farà pel mètode gràfic de Maxwell-Cremona. En la figura 2.96 s'indiquen les zones exteriors i interiors de l'estructura. Cal indicar que s'ha fet la resultant parcial vertical en el nus A ($650 - 50 = 600$ kp) i en el nus G ($350 - 50 = 300$ kp).

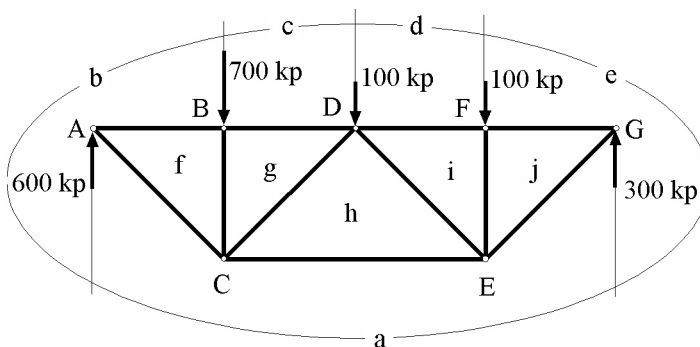


Figura 2.96: Definició de les zones de l'estructura de l'exercici 2.26 corresponent a la situació de l'apartat 2)

El diagrama de Maxwell-Cremona es mostra en la figura 2.97. Aquesta figura també indica l'escala de forces utilitzada i el valor i tipus dels esforços amb què treballen les barres.

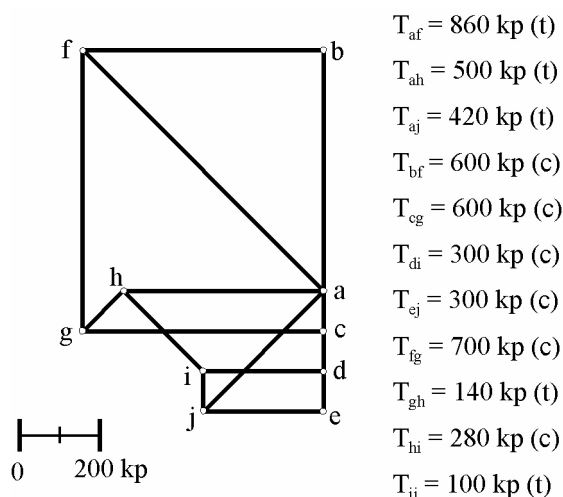


Figura 2.97: Diagrama de Maxwell-Cremona de l'exercici 2.26 i esforços en les barres (tipus i valor) corresponent a la situació de l'apartat 2)

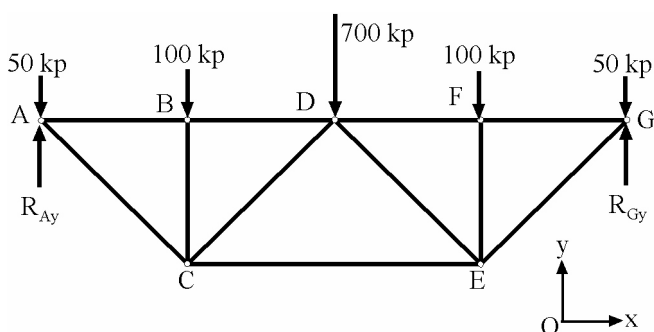


Figura 2.98: DSL de l'estructura de l'exercici 2.26 corresponent a la situació de l'apartat 3)

La figura 2.98 mostra el DSL per a la tercera situació. Per la simetria de les càrregues que actuen en l'estructura, les reaccions en els suports seran verticals i iguals, és a dir, $R_{Ay} = R_{Gy} = 500 \text{ kp}$.

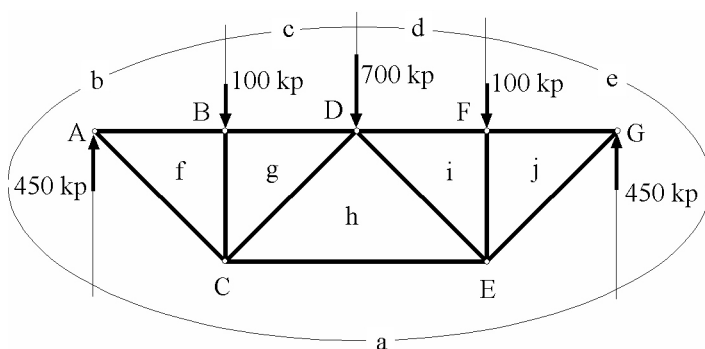


Figura 2.99: Definició de les zones de l'estructura de l'exercici 2.26 corresponent a la situació de l'apartat 3)

Com en els casos anteriors, es faran les resultants parcials verticals en els nusos A i G ($500 - 50 = 450 \text{ kp}$). L'obtenció dels esforços, valor i tipus, es farà pel mètode gràfic de Maxwell-Cremona. En la figura 2.99 s'indiquen les

zones exteriors i interiors de l'estructura.

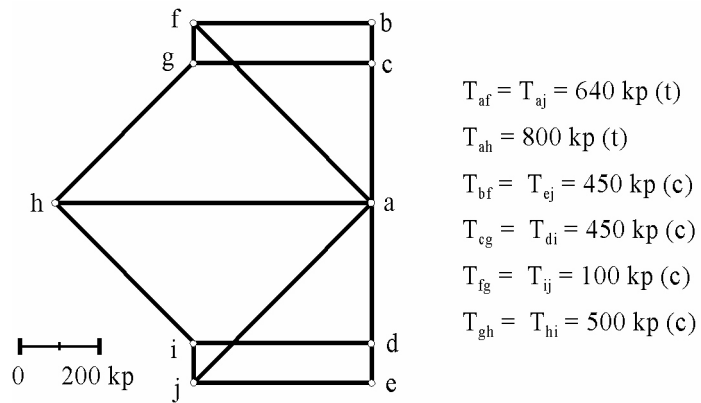


Figura 2.100: Diagrama de Maxwell-Cremona de l'exercici 2.26 i esforços en les barres (tipus i valor) corresponent a la situació de l'apartat 3)

El diagrama de Maxwell-Cremona es mostra en la figura 2.100. Aquesta figura també indica l'escala de forces utilitzada i el valor i tipus dels esforços amb què treballen les barres.

Esforços en elements estructurals: Bigues isostàtiques

3.1 Introducció teòrica i objectius

Tot element sustentant que servisca per a uns fins pràctics cal que es dimensione i es constrüisca de manera que en quede assegurada la capacitat resistent, amb prou seguretat per a totes les sol·licitacions que entren en consideració. Això és aplicable tant a un edifici com a un pont, a una grua, a una coberta, a un vehicle o a qualsevol altre tipus de màquina o construcció. En tots els casos, l'arquitecte/a o l'enginyer/a hauran d'aportar en el seu projecte les garanties suficients que en qualsevol punt de cadascun dels elements constructius hi ha el grau de seguretat que cal, no tan sols d'acord amb les normes respectives, sinó també pel que fa als límits dels materials davant les sol·licitacions previstes.

Per tot això, fa falta estudiar de quina manera es transmet a través dels elements estructurals el conjunt de forces exteriors (forces aplicades més reaccions en els suports). Denominarem biga tot element constructiu individual que permeti la transmissió de les forces exteriors en l'interior de qualsevol construcció tècnica. Es tracta de cossos allargats en els quals predomina una de les dimensions sobre les altres. La seua forma és recta o corba, encara que d'aquesta segona no en parlarem en aquest capítol. La missió principal de les bigues és treballar a flexió i absorbir forces perpendiculars a la seua directriu. De manera més formal, i malgrat les restriccions de la definició, biga és tot sòlid homogeni i isòtrop engendrat per una secció S , que generalment admet un pla de simetria i el centre de gravetat del qual descriu una línia, denominada directriu, que és perpendicular en tot moment a aquesta secció.

Els principals objectius que s'hauran d'adquirir en aquest bloc temàtic són:

- Entendre el funcionament d'una biga i els tipus de bigues.
- Conèixer **els esforços interns** que actuen en una biga.
- Saber calcular les reaccions en els suports de bigues.
- Saber obtenir les lleis dels **esforços tallants** i dels **moments flectors** sobre una biga.
- Saber dibuixar gràficament els **diagrames de tallants i flectors**.

- Conèixer l'elàstica o deformada d'una biga en flexió pura.

Per a assolir els objectius esmentats anteriorment caldrà aplicar els coneixements previs associats als blocs de sistemes de vectors lliscants paral·lels i geometria de masses. L'estudi de l'elasticitat i les bigues isostàtiques està justificat per l'íntima relació que hi ha com a elements constructius en l'enginyeria d'edificació, en particular. La base d'aquest bloc s'haurà d'aplicar en altres assignatures del grau com **Fonaments Físics de les Instal·lacions** (fonamentalment, en el bloc de temperatura i calor, on s'estudien els esforços tèrmics deguts a la dilatació dels materials), **Construccions d'Estructures I i II** o **Càlcul d'Estructures I**.

3.2 Referències bibliogràfiques

L'estudi teòric estarà relacionat amb els coneixements previs de l'alumnat. Aquest capítol es pot preparar llegint el capítol 12 de [13], el 9 de [1], el 6 de [15] i el 8 [12]. També és recomanable la consulta dels llibres [8] i [17]. Generalment, els llibres de física no desenvolupen amb detall o, fins i tot, no apareix cap capítol dedicat a aquest bloc temàtic. Tanmateix, en el capítol 12 de [16] o en el capítol 9 de [7] es poden trobar exercicis d'estàtica aplicats a estructures. És interessant la lectura dels articles [2] i [3]. Aquest capítol també es pot consultar tant en el bloc <http://blogs.ua.es/jjrr2011> com per l'OpenCourseWare de la Universitat d'Alacant.

3.3 Exercicis tipus qüestió

Depenent de la dificultat que trobe l'alumnat a l'hora de resoldre'ls, poden interpretar-se com problemes curts. El temps dedicat a resoldre cada qüestió no hauria de superar els trenta minuts en cap cas. Normalment, es tracta d'aplicar alguna llei concreta, un concepte teòric que permet arribar a la solució ràpidament o l'aplicació de fonaments matemàtics que s'haurien de saber.

Exercici 3.1: *Atesa la biga de la figura 3.1, es demana: 1) Reaccions en els suports. 2) Diagrama de tallants, acotat. 3) Diagrama de flectors, acotat.*

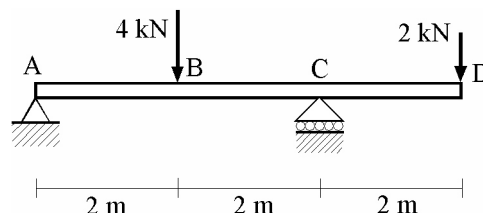


Figura 3.1: Biga i càrregues puntuals de l'exercici 3.1

Observació 3.1: Es recomana el mètode de seccions per a l'obtenció de les lleis dels esforços tallants i dels moments flectors. Podeu consultar el capítol

12 de [13] on es descriu aquest mètode i s'aplica en alguns dels exercicis resolts en aquesta referència.

Observació 3.2: Una vegada obtingudes les reaccions en els suports, podeu dibuixar qualitativament els diagrames?

SOLUCIÓ: 1. $R_{Ay} = 1 \text{ kN}$; $R_{Cy} = 5 \text{ kN}$.

2. $V_{AB}(x) = 1 \text{ kN}$; $V_{BC}(x) = -3 \text{ kN}$; $V_{CD}(x) = 2 \text{ kN}$. Diagrama d'esforços tallants en la pàgina 157.

3. $M_{AB}(x) = x \text{ kN}\cdot\text{m}$; $M_{BC}(x) = -3 \cdot x + 8 \text{ kN}\cdot\text{m}$; $M_{CD}(x) = 2 \cdot x - 12 \text{ kN}\cdot\text{m}$. Diagrama de moments flectors en la pàgina 157 \square

Exercici 3.2: La biga encastada de la figura 3.2 es considera de massa negligible enfront a les càrregues puntuals de 300 i 500 kp. Es demana: 1) Reaccions en l'encastament. 2) Valor de les tensions tallants al llarg de la biga. 3) Valor dels moments flectors al llarg de la biga. 4) En quin punt es produeix el màxim valor del moment flector?

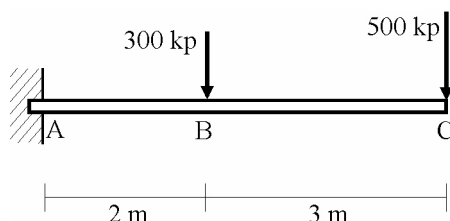


Figura 3.2: Biga encastada i càrregues puntuals de l'exercici 3.2

Observació 3.3: Recordeu que en l'encastament es produeix un moment de reacció.

SOLUCIÓ: 1. $R_{Ay} = 800 \text{ kp}$; $M_A = 3\,100 \text{ kp}\cdot\text{m}$.

2. $V_{AB}(x) = 800 \text{ kp}$; $V_{BC}(x) = 500 \text{ kp}$. Diagrama d'esforços tallants en la pàgina 159.

3. $M_{AB}(x) = 800 \cdot x - 3\,100 \text{ kp}\cdot\text{m}$; $M_{BC}(x) = 500 \cdot x - 2\,500 \text{ kp}\cdot\text{m}$. Diagrama de moments flectors en la pàgina 159.

4. $M_{\max} = -3\,100 \text{ kp}\cdot\text{m}$ en l'encastament A \square

Exercici 3.3: Una biga de 6 m de llum té restringits els moviments dels extrems de la manera següent: l'extrem esquerre només pot girar, i el dret pot girar i desplaçar-se horitzontalment. El diagrama de flectors, suposats uns

eixos coordenats cartesianes amb origen a l'extrem esquerre, ve definit de la manera següent: a) entre $x = 0$ i $x = 2$, $M = 0$; b) entre $x = 2$ i $x = 4$, $M = 1 \text{ Tm}\cdot\text{m}$; c) entre $x = 4$ i $x = 6$, $M = 0$. Sabent que l'esforç tallant és nul en tota la biga, determineu-ne l'estat de càrrega.

Observació 3.4: Tingueu en compte les relacions entre les càrregues, els esforços tallants i els moments flectors per a deduir la solució. També per a l'exercici 3.6.

SOLUCIÓ: L'estat de càrrega de la biga es troba en la pàgina 160 □

Exercici 3.4: De la biga de la figura 3.3, es demana: 1) Diagrama d'esforços tallants. 2) Diagrama de moments flectors. 3) Situació i valor del flector màxim. Dades: $F_1 = 2 \text{ Tm}$; $F_2 = 1 \text{ Tm}$.

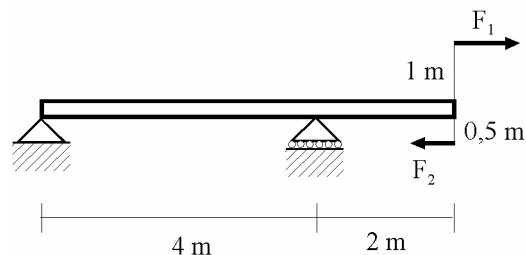


Figura 3.3: Biga de l'exercici 3.4

Observació 3.5: Utilitzeu el sistema equivalent de les forces aplicades en l'extrem dret de la biga.

SOLUCIÓ: 1. $V_{AB}(x) = -0,625 \text{ Tm}$; $V_{BC}(x) = 0 \text{ Tm}$. Diagrama d'esforços tallants en la pàgina 161.
 2. $M_{AB}(x) = -0,625 \cdot x \text{ Tm}\cdot\text{m}$; $M_{BC}(x) = -2,5 \text{ Tm}\cdot\text{m}$. Diagrama de moments flectors en la pàgina 161.
 3. El flector màxim de valor $-2,5 \text{ Tm}\cdot\text{m}$, es produeix en el tram BC □

Exercici 3.5: En la figura 3.4 es mostra, de forma simplificada, un dispositiu del tipus utilitzat a les platges per a allotjar personal de vigilància i salvament. El centre de gravetat del conjunt format per la persona, el pal vertical i la cofa, es troba a una distància de 0,5 m de l'extrem C de la biga. La biga, el pes de la qual és 2000 kp, està subjectada en l'extrem A per una articulació fixa i recolzada en B amb un contacte llis. Es demana: 1) Reaccions en els

suports. 2) Diagrama d'esforços tallants en la biga ABC, acotat. 3) Diagrama de moments flectors en la biga ABC, acotat.

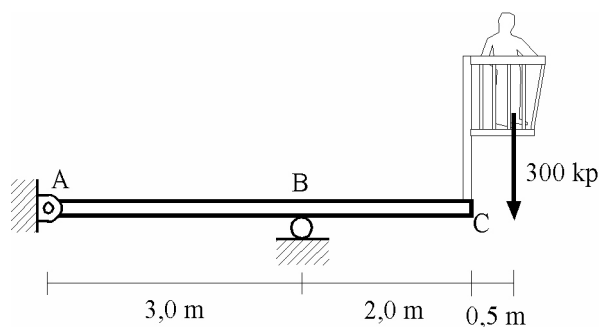


Figura 3.4: Biga i dispositiu de vigilància de l'exercici 3.5

Observació 3.6: Substitueu el pes de 300 kp pel seu sistema equivalent en l'extrem C de la biga.

SOLUCIÓ: 1. $R_{Ay} = 80$ kp; $R_{By} = 2\,220$ kp.

2. $V_{AB}(x) = -400 \cdot x + 80$ kp; $V_{BC}(x) = -400 \cdot x + 2\,300$ kp. Diagrama d'esforços tallants en la pàgina 163.

3. $M_{AB}(x) = -200 \cdot x^2 + 80 \cdot x$ kp·m; $M_{BC}(x) = -200 \cdot x^2 + 2\,300 \cdot x - 6\,660$ kp·m. Diagrama de moments flectors en la pàgina 163 \square

Exercici 3.6: Analitzeu les càrregues a què està sotmesa la biga el diagrama de flectors de la qual es mostra en la figura 3.5. Les unitats en què s'expressen els flectors són Tm·m.

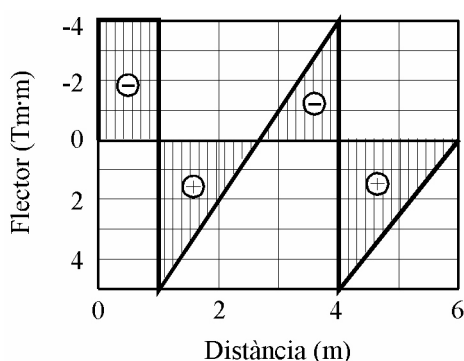


Figura 3.5: Diagrama de moments flectors per a la biga de l'exercici 3.6

SOLUCIÓ: L'estat de càrrega de la biga es troba en la pàgina 164 \square

Si encara no heu aconseguit resoldre-les, preneu nota de totes les dificultats i aprofiteu tots els recursos disponibles al vostre abast en la Universitat. La

resolució d'aquestes qüestions es pot trobar en la secció 3.6 amb tots els passos detallats. **Recordeu que és possible fer els exercicis correctament i arribar a una solució lleugerament diferent com a conseqüència del truncament numèric decimal.**

3.4 Exercicis tipus examen

Exercici 3.7: La biga de la figura 3.6 té un pes de 5 000 N. En un extrem està subjectada per una articulació fixa i en l'altre a un suport llis (de corrons). En la posició que s'indica existeix un petit carretó de pes 4 000 N, recolzat sobre dues rodes. Es demana: 1) Reaccions en els suports. 2) Diagrama de tallants, acotat. 3) Diagrama de flectors, acotat.

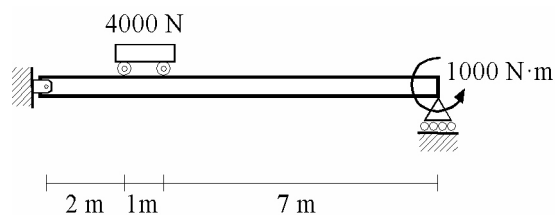


Figura 3.6: Biga de l'exercici 3.7

Observació 3.7: Tingueu en compte que el pes propi de la biga s'ha de considerar com una càrrega uniformement distribuïda (homogènia). Per a obtenir les lleis dels esforços tallants i dels moments flectors s'utilitzarà el mètode general.

SOLUCIÓ: 1. $R_{Ay} = 5\,600\text{ N}$; $R_{Dy} = 3\,400\text{ N}$.

2. $V_{AB}(x) = -500 \cdot x + 5\,600\text{ N}$; $V_{BC}(x) = -500 \cdot x + 3\,600\text{ N}$; $V_{CD}(x) = -500 \cdot x + 1\,600\text{ N}$. Diagrama d'esforços tallants en la pàgina 166.

3. $M_{AB}(x) = -250 \cdot x^2 + 5\,600 \cdot x\text{ N}\cdot\text{m}$; $M_{BC}(x) = -250 \cdot x^2 + 3\,600 \cdot x + 4\,000\text{ N}\cdot\text{m}$; $M_{CD}(x) = -250 \cdot x^2 + 1\,600 \cdot x + 10\,000\text{ N}\cdot\text{m}$. Diagrama de moments flectors en la pàgina 166 □

Exercici 3.8: Una persona decideix construir-se un trampolí encastant una plataforma de pes lineal 60 kp/m en un bloc de formigó (pes específic $= 2\,500\text{ kp/m}^3$) d'1 m d'ample, sent la resta de les dimensions les indicades en la figura 3.7. El bloc no té cap tipus d'ancoratge amb el sòl. El pes de la persona és de 100 kp i està situada en l'extrem de la plataforma.

1. Es demana que trobeu el valor de la longitud màxima de la plataforma perquè el trampolí no bolque, suposant un factor de seguretat igual a 2,5.
2. Per a aquest valor de L , trobeu els valors de la reacció i el moment de reacció del bloc de formigó sobre la plataforma.

3. Calculeu els diagrames d'esforços tallants i moments flectors de la plataforma, acotats.

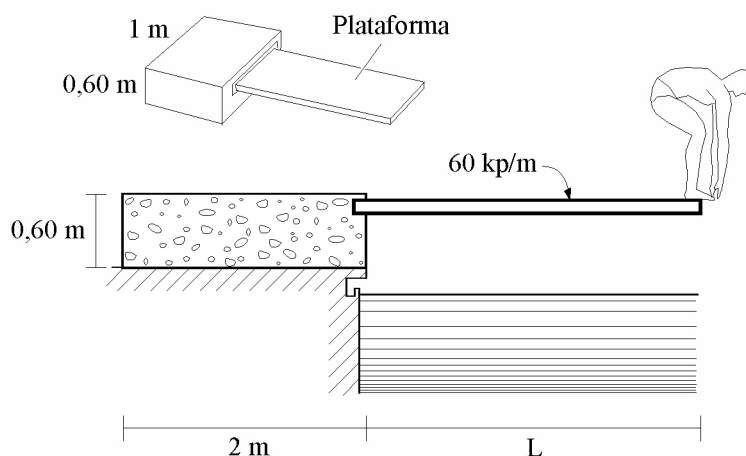


Figura 3.7: Esquema del trampolí de l'exercici 3.8

Observació 3.8: Recordeu que el coeficient de seguretat està relacionat amb els moments de gir i antigir.

SOLUCIÓ: 1. $L \approx 4,9$ m.

2. $R_{Ay} = 394$ kp; $M_A = 1210$ kp·m.

3. Diagrames d'esforços tallants i de moments flectors en la pàgina 169

□

Exercici 3.9: En la figura 3.8 es mostra una bastida AE que pot ser assimilada a una biga recta de pes negligible enfront de les reaccions i forces exteriors. La bastida està suportada per dues travesses B i D que fan un contacte llis amb la bastida. Sobre la bastida actuen les següents càrregues: un dipòsit d'aigua, el pes total del qual és de 300 kp, i que pot tractar-se com una càrrega contínua que actua en el tram AB; un obrer de pes 90 kp, assimilable a una càrrega puntual que actua en el punt C; i una caldereta de formigó, recolzada sobre quatre potes, el pes total del qual de 200 kp es considera aplicat en el seu centre. El pes de la caldereta es pot considerar aplicat sobre la bastida com dues càrregues puntuals en els punts D i E, respectivament. Es demana:

1. Reaccions de les travesses B i D sobre la bastida i valors dels esforços en els quatre cables que subjecten les travesses.
2. Diagrama d'esforços tallants, acotat.
3. Diagrama de moments flectors, acotat.

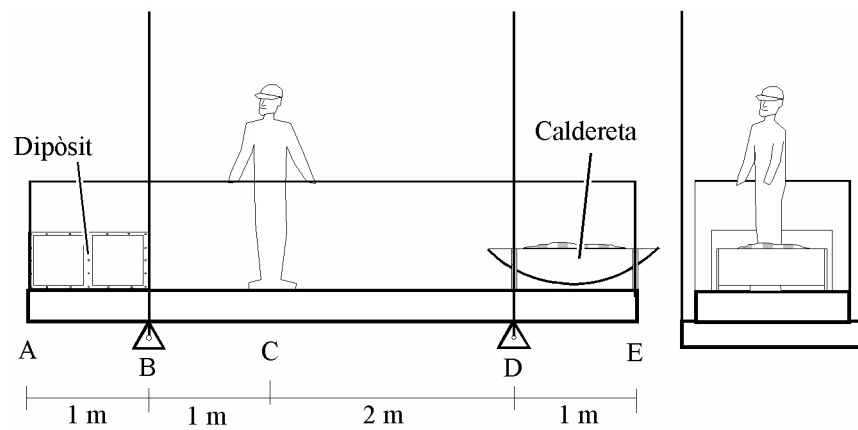


Figura 3.8: Bastida amb les càrregues exteriors que actuen de l'exercici 3.9

Observació 3.9: Recordeu que una càrrega contínua homogènia es pot substituir per una única força aplicada sobre el seu centre de gravetat.

SOLUCIÓ: 1. $R_{By} = 377$ kp; $R_{Dy} = 213$ kp. Els cables de B suporten 188,5 kp cadascú d'ells i els de D suporten 106,5 kp.
 2. $V_{AB}(x) = -300 \cdot x$ kp; $V_{BC}(x) = 77$ kp; $V_{CD}(x) = -13$ kp; $V_{DE}(x) = 100$ kp. Diagrama d'esforços tallants en la pàgina 171.
 3. $M_{AB}(x) = -150 \cdot x^2$ kp·m; $M_{BC}(x) = 77 \cdot x - 227$ kp·m; $M_{CD}(x) = -13 \cdot x - 47$ kp·m; $M_{DE}(x) = 100 \cdot x - 499$ kp·m. Diagrama de moments flectors en la pàgina 171 \square

Exercici 3.10: En la figura 3.9 es mostren dues bigues unides per un cable en el punt B. Els suports A i F són fixos i el suport en C (comú a les dues bigues) és de corrons. Les càrregues que actuen sobre el conjunt són les indicades. Es demana que trobeu: 1) La tensió en el cable B i les reaccions en els suports A, C i F. 2) Diagrames d'esforços tallants i moments flectors de la **biga AD**, acotat.

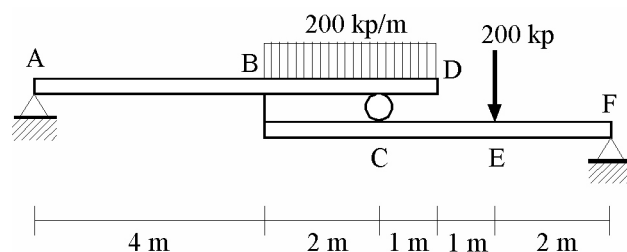


Figura 3.9: Disposició de les bigues de l'exercici 3.10

Observació 3.10: Tingueu en compte que cada biga s'ha de considerar com un sòlid rígid independent per a obtenir les reaccions en els suports. Aquesta observació serveix també per als exercicis 3.11 i 3.12.

SOLUCIÓ: 1. $T_B = 780$ kp; $R_{Ay} = 310$ kp; $R_{Cy} = 1\,070$ kp; $R_{Fy} = 490$ kp.
 2. $V_{AB}(x) = 310$ kp; $V_{BC}(x) = -200 \cdot x + 330$ kp; $V_{CD}(x) = -200 \cdot x + 1\,400$ kp; $M_{AB}(x) = 310 \cdot x$ kp·m; $M_{BC}(x) = -100 \cdot x^2 + 330 \cdot x + 1\,520$ kp·m; $M_{CD}(x) = -100 \cdot x^2 + 1\,400 \cdot x - 4\,900$ kp·m. Diagrames d'esforços tallants i moments flectors en la pàgina 3.38 \square

Exercici 3.11: Un sistema d'informació per al trànsit en carretera, consisteix en dos panells lluminosos de pes 100 kp cadascun, muntats sobre una biga AB de $1\,600$ kp de pes (figura 3.10). Aquesta biga està soldada a un pal vertical CD , encastat en el sòl, de pes $5\,000$ kp. Es demana:

1. Reaccions del pal vertical sobre la biga AB en el punt A .
2. Reaccions del sòl sobre el pal vertical CD .
3. Diagrames d'esforços tallants i moments flectors, acotats, de la biga AB .
4. Diagrames d'esforços tallants i moments flectors, acotats, de la biga CD .

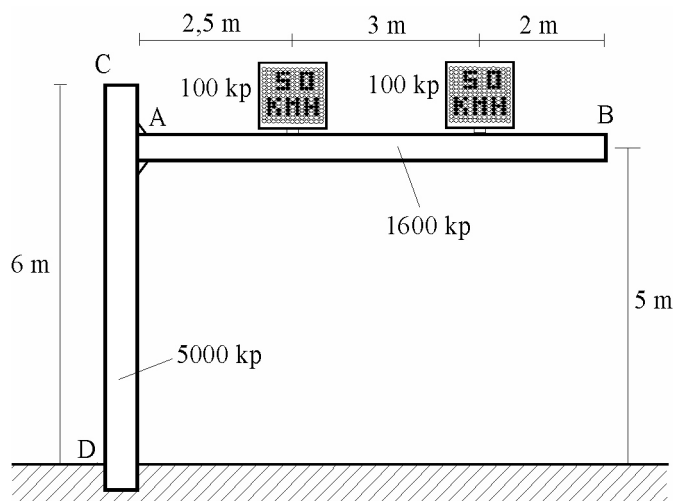


Figura 3.10: Sistema d'informació per al trànsit en carretera de l'exercici 3.11

SOLUCIÓ: 1. $R_{Ay} = 1\,800$ kp; $M_A = 6\,800$ kp·m.
 2. $R_{Dy} = 6\,800$ kp; $M_D = -6\,800$ kp·m.
 3. $V_{AE}(x) = -213 \cdot x + 1\,800$ kp; $V_{EF}(x) = -213 \cdot x + 1\,700$ kp; $V_{FB}(x) = -213 \cdot x + 1\,600$ kp; $M_{AE}(x) = -106,7 \cdot x^2 + 1\,800 \cdot x - 6\,800$ kp·m; $M_{EF}(x) = -106,7 \cdot x^2 + 1\,700 \cdot x - 6\,550$ kp·m; $M_{FB}(x) = -106,7 \cdot x^2 + 1\,600 \cdot x - 6\,000$ kp·m. Diagrama d'esforços tallants i de moments flectors en la pàgina 177.

4. Els esforços tallants són nuls. $M_{DA} = -6\,800\text{ kp}\cdot\text{m}$ i nul en el tram AC. Diagrama de moments flectors en la pàgina 177 \square

Exercici 3.12: La biga encastada de la figura 3.11 té un pes propi de 900 kp. En un extrem penja de dos cables un anunci de 400 kp de pes. Es demana que trobeu: 1) Tensions en els cables, calculades analíticament i gràficament. 2) Reaccions en els suports. 3) Diagrames d'esforços tallants i de moments flectors, acotats.

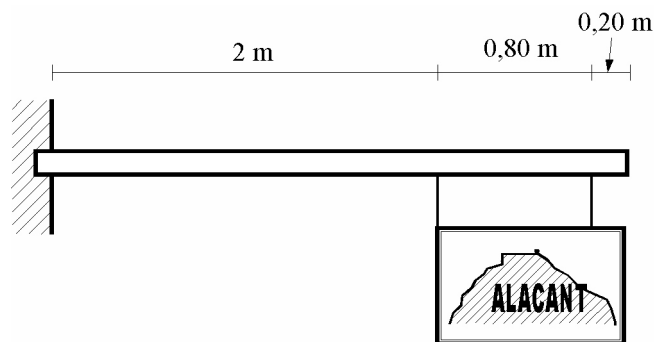


Figura 3.11: Biga encastada amb panell anunciador de l'exercici 3.12

SOLUCIÓ: 1. $T_1 = 150\text{ kp}$; $T_2 = 250\text{ kp}$.

2. $R_{Ay} = 1\,300\text{ kp}$; $M_A = 2\,350\text{ kp}\cdot\text{m}$.

3. $V_{AB}(x) = -300 \cdot x + 1\,300\text{ kp}$; $V_{BC}(x) = -300 \cdot x + 1\,150\text{ kp}$; $V_{CD}(x) = -300 \cdot x + 900\text{ kp}$; $M_{AB}(x) = -150 \cdot x^2 + 1\,300 \cdot x - 2\,350\text{ kp}\cdot\text{m}$; $M_{BC}(x) = -150 \cdot x^2 + 1\,150 \cdot x - 2\,050\text{ kp}\cdot\text{m}$; $M_{CD}(x) = -150 \cdot x^2 + 900 \cdot x - 1\,350\text{ kp}\cdot\text{m}$.

Diagrama d'esforços tallants i de moments flectors en la pàgina 180 \square

3.5 Exercicis tipus problema investigació

Exercici 3.13: La junta de govern de la Universitat d'Alacant ha decidit posar un trampolí en la piscina del pavelló d'esports. El projecte presentat consisteix en una plataforma encastada en un bloc de formigó sense subjectar-se al sòl. Quina pot ser la longitud màxima de la plataforma perquè no bolque? Supposeu un coeficient de seguretat adequat a aquesta situació.

Exercici 3.14: El sistema d'informació per al trànsit en carretera, consisteix en dos panells lluminosos sobre una biga soldada a un pal vertical encastat al sòl. Quina o quines solucions es podrien plantejar?

Exercici 3.15: *L'empresa que gestiona el servei de vigilància i salvament en les platges d'Alacant vol col·locar un pal vertical i la cofa en l'extrem d'una biga. Quina solució podem presentar a aquesta empresa?*

L'alumnat ha de pensar i reflexionar la manera d'enfrontar-se a una possible situació real. Lògicament la solució no és única i caldrà prendre les decisions òptimes. Aquesta proposta de problema investigació s'integra en el bloc temàtic d'estàtica aplicada a les bigues isostàtiques. Els objectius generals són:

- Comprendre l'interès de conèixer les propietats elàstiques i la resistència dels diferents materials que s'utilitzen en les estructures articulades.
- Intervenir en projectes tècnics amb autonomia i confiança i participar en la planificació i desenvolupament de solucions estructurals en equip.
- Identificar les condicions que ha de complir la possible solució en funció de les normes establides per les autoritats competents i la legalitat vigent del codi tècnic de l'edificació.

Els objectius específics són:

- Saber de quina manera es transmet a través dels elements estructurals el conjunt de forces exteriors (càrregues aplicades i reaccions en els suports).
- Saber la missió principal de les bigues.
- Saber calcular les reaccions en els suports.
- Saber els mètodes d'obtenció dels esforços interns en les bigues.
- Conèixer el fonament de l'elàstica d'una biga.
- Plantejar-se solucions alternatives mitjançant lleugeres modificacions de les magnituds físiques, dels materials de les bigues i càrregues, per a comparar-les i triar la que consideren més adequada.

L'apèndix B conté les característiques principals d'aquesta metodologia.

3.6 Resolució dels exercicis tipus qüestió

Exercici 3.1 Atesa la biga de la figura 3.1 de la pàgina 146, es demana: 1) Reaccions en els suports. 2) Diagrama de tallants, acotat. 3) Diagrama de flexors, acotat.

Com que no s'indica el pes propi de la biga, considerarem que aquest es negligible enfront de les càrregues aplicades. D'altra banda, com que les càrregues aplicades són verticals, les reaccions en els suports també ho seran. Això implica que la component horitzontal de la reacció en el suport fix, R_{Ax} , ha de ser zero. El DSL, tenint en compte el que s'ha explicat, es mostra en la figura 3.12. Les equacions d'equilibri corresponents a aquest DSL són:

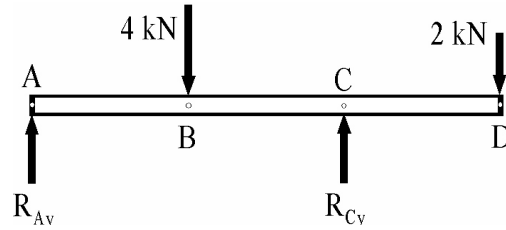


Figura 3.12: DSL de la biga de l'exercici 3.1

$$\sum_{i=1}^4 F_{i_y} = 0 = R_{Ay} - 4 + R_{Cy} - 2 \implies R_{Ay} + R_{Cy} = 6 \text{ kN}$$

$$\sum_{i=1}^3 M_{i_A} = 0 = 4 \cdot 2 - R_{Cy} \cdot 4 + 2 \cdot 6 \implies R_{Cy} = 5 \text{ kN}$$

on s'han pres moments respecte del punt A, sent positius els que tenen el sentit de les agulles del rellotge i es dedueix que $R_{Ay} = 1 \text{ kN}$.

La biga AD té tres trams de càrrega: AB, BC i CD. S'obtidran les expressions analítiques d'esforços tallants i moments flectors amb el procediment de seccions. El DSL que correspon a cada tram es mostra en la figura 3.13, on s'han aplicat les condicions d'equilibri i s'han pres moments respecte del punt de tall en cada tram, sent negatius els que tenen el sentit de les agulles del rellotge.

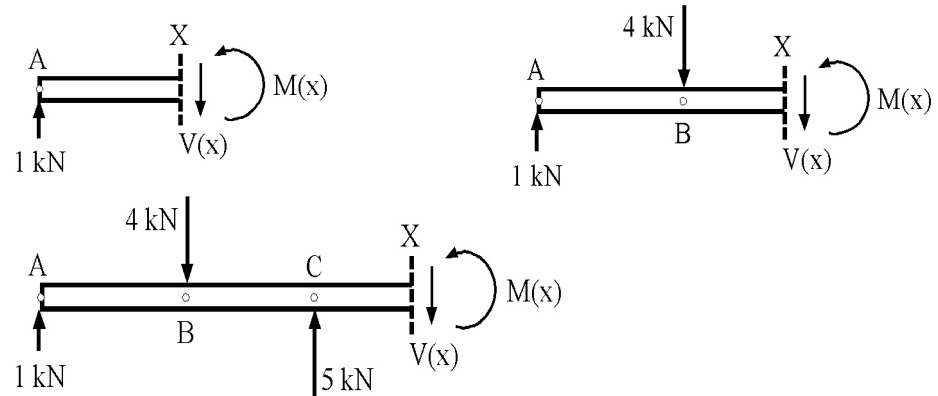


Figura 3.13: DSL de cada tram de la biga de l'exercici 3.1

TRAM AB ($0 \leq x < 2 \text{ m}$), corresponent a la part superior esquerra de la figura 3.13:

$$\sum_{i=1}^2 F_{i_y} = 0 = -1 + V_{AB}(x) \implies V_{AB}(x) = 1 \text{ kN}$$

$$\sum_{i=1}^2 M_{i_x} = 0 = -1 \cdot x + M_{AB}(x) \implies M_{AB}(x) = x \text{ kN} \cdot \text{m}$$

TRAM BC ($2 \leq x < 4$ m), corresponent a la part superior dreta de la figura 3.13:

$$\sum_{i=1}^3 F_{iy} = 0 = -1 + 4 + V_{BC}(x) \Rightarrow V_{BC}(x) = -3 \text{ kN}$$

$$\sum_{i=1}^3 M_{ix} = 0 = -1 \cdot x + 4 \cdot (x - 2) + M_{BC}(x) \Rightarrow M_{BC}(x) = -3 \cdot x + 8 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

TRAM CD ($4 \leq x < 6$ m), corresponent a la part inferior de la figura 3.13:

$$\sum_{i=1}^4 F_{iy} = 0 = -1 + 4 - 5 + V_{CD}(x) \Rightarrow V_{CD}(x) = 2 \text{ kN}$$

$$\sum_{i=1}^4 M_{ix} = 0 = -1 \cdot x + 4 \cdot (x - 2) - 5 \cdot (x - 4) + M_{CD}(x) \Rightarrow M_{CD}(x) = 2 \cdot x - 12 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Els diagrames d'esforços tallants i moments flectors, degudament acotats, es mostren en la figura 3.14.

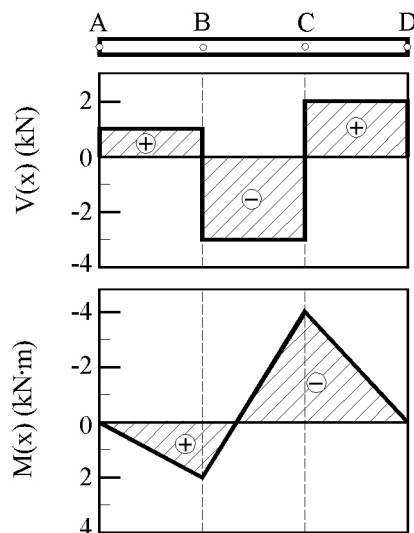


Figura 3.14: Diagrames dels esforços tallants i moments flectors de l'exercici 3.1

Exercici 3.2 La biga encastada de la figura 3.2 de la pàgina 147 es considera de massa negligible enfront a les càrregues puntuals de 300 i 500 kp. Es demana: 1) Reaccions en l'encastament. 2) Valor de les tensions tallants al llarg de la biga. 3) Valor dels moments flectors al llarg de la biga. 4) En quin punt es produeix el màxim valor del moment flector?

La figura 3.15 mostra el DSL de la biga encastada on no s'ha considerat la component horitzontal de la reacció en l'encastament perquè és nul·la per ser l'única que hi ha aplicada. D'acord al DSL s'estableixen les equacions d'equilibri:

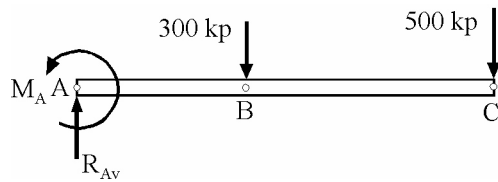


Figura 3.15: DSL de la biga encastada de l'exercici 3.2

$$\sum_{i=1}^3 F_{iy} = 0 = R_{Ay} - 300 - 500 \implies R_{Ay} = 800 \text{ kp}$$

$$\sum_{i=1}^3 M_{iA} = 0 = M_A - 300 \cdot 2 - 500 \cdot 5 \implies M_A = 3100 \text{ kp} \cdot \text{m}$$

on s'han pres moments respecte del punt A, sent negatius els que tenen el sentit de les agulles del rellotge.

Els trams de càrrega de la biga són dos: AB i BC. Es resoldrà la biga pel mètode de seccions. El DSL que correspon a cada tram es mostra en la figura 3.16, on s'han aplicat les condicions d'equilibri i s'han pres moments respecte del punt de tall en cada tram, sent negatius els que tenen el sentit de les agulles del rellotge.

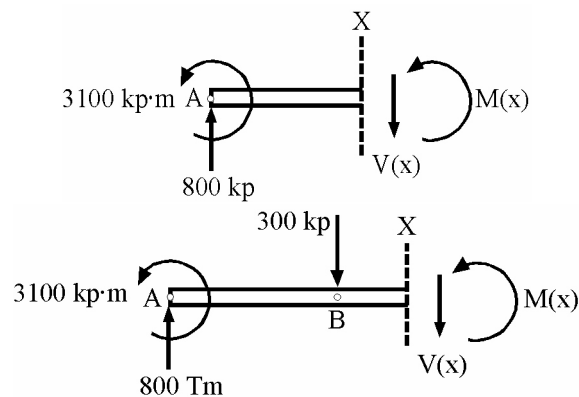


Figura 3.16: DSL dels trams AB (superior) i BC (inferior) de la biga encastada de l'exercici 3.2

TRAM AB ($0 \leq x < 2 \text{ m}$), corresponent a la part superior de la figura 3.16:

$$\sum_{i=1}^2 F_{iy} = 0 = -800 + V_{AB}(x) \implies V_{AB}(x) = 800 \text{ kp}$$

$$\sum_{i=1}^2 M_{ix} = 0 = 3100 - 800 \cdot x + M_{AB}(x) \implies M_{AB}(x) = 800 \cdot x - 3100 \text{ kp} \cdot \text{m}$$

TRAM BC ($2 \leq x < 5 \text{ m}$), corresponent a la part inferior de la figura 3.16:

$$\sum_{i=1}^3 F_{iy} = 0 = -800 + 300 + V_{BC}(x) \implies V_{BC}(x) = 500 \text{ kp}$$

$$\sum_{i=1}^4 M_{i_x} = 0 = 3\,100 - 800 \cdot x + 300 \cdot (x - 2) + M_{BC}(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M_{BC}(x) = 500 \cdot x - 2\,500 \text{ kp} \cdot \text{m}$$

Els diagrames d'esforços tallants i moments flectors per a la biga encastada, degudament acotats, es mostren en la figura 3.17.

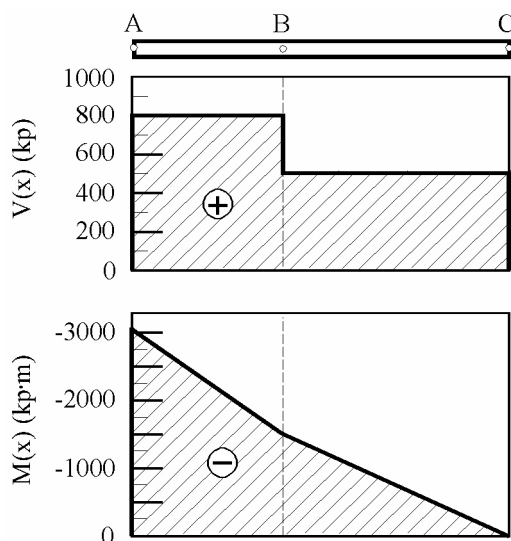


Figura 3.17: Diagrames dels esforços tallants i moments flectors de l'exercici 3.2

El valor màxim del moment flector es produeix en l'encastament A, on el seu valor és $M_{màx} = -3\,100 \text{ kp} \cdot \text{m}$.

Exercici 3.3 Una biga de 6 m de llum té restringits els moviments dels seus extrems de la manera següent: l'extrem esquerre només pot girar, i el dret pot girar i desplaçar-se horitzontalment. El seu diagrama de flectors, suposats uns eixos coordenats cartesianes amb origen a l'extrem esquerre, ve definit de la manera següent: a) entre $x = 0$ i $x = 2$, $M = 0$; b) entre $x = 2$ i $x = 4$, $M = 1 \text{ Tm} \cdot \text{m}$; c) entre $x = 4$ i $x = 6$, $M = 0$. Sabent que l'esforç tallant és nul en tota la biga, determineu-ne l'estat de càrrega.

- Si l'esforç tallant és nul en tota la biga, això implica que entre $x = 0$ i $x = 6$ no hi ha càrregues exteriors degudes a forces verticals. Les reaccions de recolzament en $x = 0$ i en $x = 6$ són nul·les. Es dedueix que la biga no té pes.
- En $x = 2$ el moment flector canvia de $M = 0$ a $M = 1 \text{ Tm} \cdot \text{m}$, que ha d'estar originat per un moment exterior el valor del qual és $M_{ext} = -1 \text{ Tm} \cdot \text{m}$, de sentit horari.
- En $x = 4$ el moment flector canvia de $M = 1 \text{ Tm} \cdot \text{m}$ a $M = 0$, que ha d'estar originat per un altre moment exterior el valor del qual és $M_{ext} = 1 \text{ Tm} \cdot \text{m}$, de sentit antihorari.

Per tant, l'estat de càrregues de la biga serà el que s'indica en la figura 3.18.

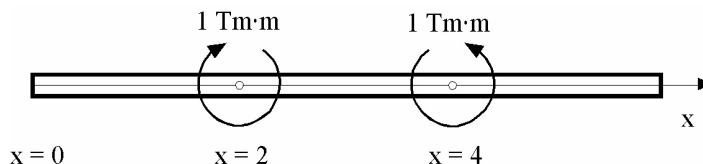


Figura 3.18: Estat de càrrega de la biga de l'exercici 3.3

Exercici 3.4 De la biga de la figura 3.3 de la pàgina 148, es demana:

- 1) Diagrama d'esforços tallants. 2) Diagrama de moments flectors. 3) Situació i valor del flector màxim. Dades: $F_1 = 2 \text{ Tm}$; $F_2 = 1 \text{ Tm}$.

La figura 3.19 mostra el DSL d'aquesta biga, on el parell de forces F_1 i F_2 han sigut substituïdes pel seu torçor en C: resultant $F_1 - F_2 = 1 \text{ Tm}$ i moment resultant $F_1 \cdot 1 - F_2 \cdot 0,5 = 2,5 \text{ Tm} \cdot \text{m}$.

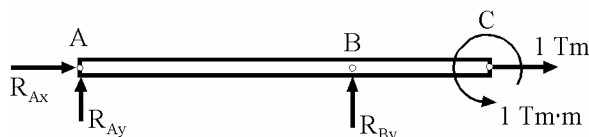


Figura 3.19: DSL de la biga de l'exercici 3.4

Prenent moments respecte del punt A, sent positius els que tenen el sentit de moviment de les agulles del rellotge, les equacions d'equilibri serien:

$$\sum_{i=1}^2 F_{i_x} = 0 = R_{Ax} + 1 \implies R_{Ax} = -1 \text{ Tm}$$

$$\sum_{i=1}^2 F_{i_y} = 0 = R_{Ay} + R_{By} \implies R_{Ay} = -R_{By}$$

$$\sum_{i=1}^2 M_{i_A} = 0 = R_{By} \cdot 4 - 2,5 \implies R_{By} = 0,625 \text{ Tm}$$

d'on es dedueix que $R_{Ay} = -0,625 \text{ Tm}$.

Els trams de càrrega de la biga són dos: AB i BC. Es resoldrà la biga pel mètode de seccions. El DSL que correspon a cada tram es mostra en la figura 3.20, on s'han aplicat les condicions d'equilibri i s'han pres moments respecte del punt de tall en cada tram, sent positius els que tenen el sentit contrari de les agulles del rellotge.

TRAM AB ($0 \leq x < 4 \text{ m}$), corresponent a la part superior de la figura 3.20:

$$\sum_{i=1}^2 F_{i_y} = 0 = 0,625 + V_{AB}(x) \implies V_{AB}(x) = -0,625 \text{ Tm}$$

$$\sum_{i=1}^2 M_{i_x} = 0 = -0,625 \cdot x + M_{AB}(x) \implies M_{AB}(x) = -0,625 \cdot x \text{ Tm} \cdot \text{m}$$

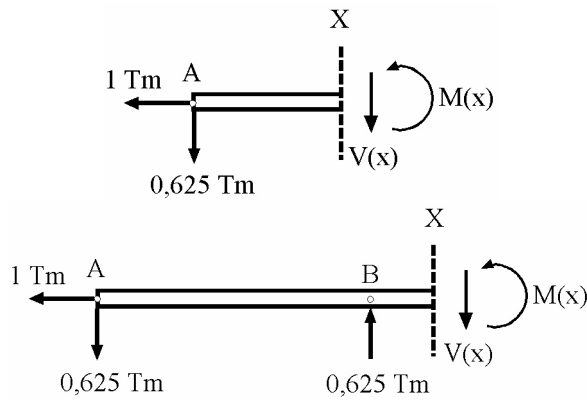


Figura 3.20: DSL dels trams AB (superior) i BC (inferior) de la biga de l'exercici 3.4

TRAM BC ($4 \leq x < 6$ m), corresponent a la part inferior de la figura 3.20:

$$\sum_{i=1}^3 F_{iy} = 0 = 0,625 - 0,625 + V_{BC}(x) \Rightarrow V_{BC}(x) = 0 \text{ Tm}$$

$$\sum_{i=1}^3 M_{ix} = 0 = 0,625 \cdot x - 0,625 \cdot (x - 4) + M_{BC}(x) \Rightarrow M_{BC}(x) = -2,5 \text{ kp} \cdot \text{m}$$

Els diagrames d'esforços tallants i moments flectors per a la biga, degudament acotats, es mostren en la figura 3.21.

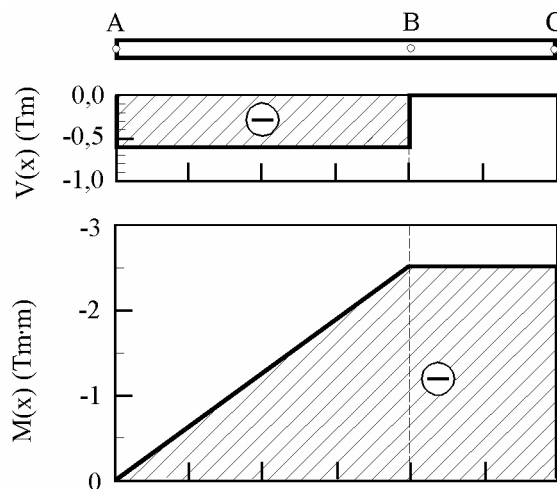


Figura 3.21: Diagrames dels esforços tallants i moments flectors de l'exercici 3.4

Exercici 3.5 En la figura 3.4 de la pàgina 149 es mostra, de forma simplificada, un dispositiu del tipus utilitzat en les platges per a allotjar personal de vigilància i salvament. El centre de gravetat del conjunt format per la persona, el pal vertical i la cofa, es troba a una distància de 0,5 m de l'extrem C de la biga. La biga, el pes de la qual és 2000 kp, està subjectada en l'extrem A per una articulació fixa i recolzada en B amb un contacte llis. Es demana:

1. Reaccions en els suports.
2. Diagrama d'esforços tallants en la biga ABC, acotat.
3. Diagrama de moments flectors en la biga ABC, acotat.

En el DSL de la figura 3.22 es poden veure les càrregues i reaccions en la biga. No s'ha dibuixat la component R_{Ax} perquè és zero (només hi ha aplicades càrregues verticals). El pes de la biga (2000 kp) s'ha aplicat en el centre de gravetat, considerant-se una càrrega homogènia distribuïda uniformement. I el pes de 300 kp (persona, cofa i pal vertical) dóna lloc en el punt C a un torçor de resultant 300 kp i un moment resultant de $300 \cdot 0,5 = 150 \text{ kp}\cdot\text{m}$, el sentit del qual és el de moviment de les agulles del rellotge.

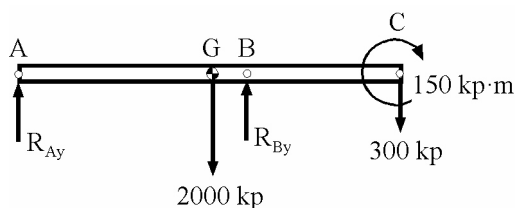


Figura 3.22: DSL de la biga de l'exercici 3.5

Prenent moments respecte del punt A, sent positius els que tenen el sentit de moviment de les agulles del rellotge, les equacions d'equilibri serien:

$$\sum_{i=1}^4 F_{iy} = 0 = R_{Ay} - 2000 + R_{By} - 300 \implies R_{Ay} + R_{By} = 2300 \text{ kp}$$

$$\sum_{i=1}^4 M_{iA} = 0 = 2000 \cdot 2,5 - R_{By} \cdot 3 + 300 \cdot 5 + 150 \implies R_{By} = 2220 \text{ kp}$$

d'on es dedueix que $R_{Ay} = 80 \text{ kp}$.

Els trams de càrrega de la biga són dos: AB i BC. Es resoldrà la biga pel mètode de seccions. El DSL que correspon a cada tram es mostra en la figura 3.23, on s'han aplicat les condicions d'equilibri i s'han pres moments respecte del punt de tall en cada tram, sent negatius els que tenen el sentit de les agulles del rellotge. El pes de la biga s'ha pres com una càrrega distribuïda la densitat lineal de càrrega de la qual és constant de valor $q = 400 \text{ kp/m}$.

TRAM AB ($0 \leq x < 3 \text{ m}$), corresponent a la part superior de la figura 3.23:

$$\sum_{i=1}^3 F_{iy} = 0 = -80 + 400 \cdot x + V_{AB}(x) \implies V_{AB}(x) = -400 \cdot x + 80 \text{ kp}$$

$$\sum_{i=1}^2 M_{ix} = 0 = -80 \cdot x + 400 \cdot x \cdot \frac{x}{2} + M_{AB}(x) \implies M_{AB}(x) = -200 \cdot x^2 + 80 \cdot x \text{ kp}\cdot\text{m}$$

TRAM BC ($3 \leq x < 5 \text{ m}$), corresponent a la part inferior de la figura 3.23:

$$\sum_{i=1}^4 F_{iy} = 0 = -80 + 400 \cdot x - 2220 + V_{BC}(x) \implies V_{BC}(x) = -400 \cdot x + 2300 \text{ kp}$$

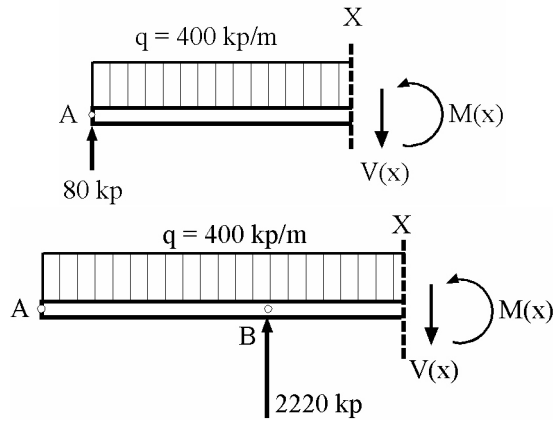


Figura 3.23: DSL dels trams AB (superior) i BC (inferior) de la biga de l'exercici 3.5

$$\sum_{i=1}^4 M_{i_x} = 0 = -80 \cdot x + 400 \cdot x \cdot \frac{x}{2} - 2220 \cdot (x-3) + M_{BC}(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M_{BC}(x) = -200 \cdot x^2 + 2300 \cdot x - 6660 \text{ kp} \cdot \text{m}$$

Els diagrames d'esforços tallants i moments flectors per a la biga, degudament acotats, es mostren en la figura 3.24.

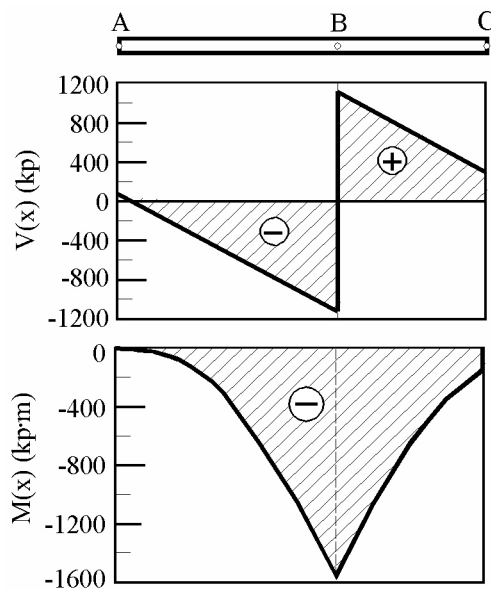


Figura 3.24: Diagrames dels esforços tallants i moments flectors de l'exercici 3.5

Exercici 3.6 Analitzeu les càrregues a què està sotmesa la biga el diagrama de flectors de la qual es mostra en la figura 3.5 de la pàgina 149. Les unitats en què s'expressen els flectors són Tm·m.

Per a fer la discussió del diagrama de moments flectors farem ús de les relacions entre càrregues, esforços tallants i moments flectors que es dedueixen de l'equilibri intern d'una biga.

En $x = 0$ el moment flector passa de 0 a $-4 \text{ Tm}\cdot\text{m}$, que ha d'estar originat per un moment exterior el valor del qual és $M_{ext} = 4 \text{ Tm}\cdot\text{m}$, de sentit antihorari.

Entre $x = 0$ i $x = 1$, $M = -4 \text{ Tm}\cdot\text{m}$. Com que:

$$V(x) = \frac{dM(x)}{dx} \implies V(x) = 0$$

es dedueix que no hi ha forces exteriors actuant sobre la biga.

En $x = 1$ hi ha una discontinuïtat del moment flector el valor del qual és $5 - (-4) = 9 \text{ Tm}\cdot\text{m}$, que ha d'estar originada per un moment exterior el valor del qual és $M_{ext} = -9 \text{ Tm}\cdot\text{m}$, de sentit horari.

Entre $x = 1$ i $x = 4$ el moment flector varia de $+5$ a $-4 \text{ Tm}\cdot\text{m}$, és a dir, $-4 - 5 = -9 \text{ Tm}\cdot\text{m}$. L'esforç tallant seria doncs:

$$V(x) = \frac{dM(x)}{dx} = \frac{-9}{3} \implies V(x) = -3 \text{ Tm}$$

amb la qual cosa haurà d'haver aplicada una força exterior vertical en $x = 1$ el valor de la qual seria -3 Tm , sentit cap avall.

En $x = 4$ hi ha una altra discontinuïtat del moment flector idèntica a l'existent en $x = 1$, que també ha d'estar originada per un moment exterior el valor del qual és $M_{ext} = -9 \text{ Tm}\cdot\text{m}$, de sentit horari.

L'esforç tallant en l'interval $4 < x < 6$ valdria:

$$V(x) = \frac{dM(x)}{dx} = \frac{0 - 5}{6 - 4} \implies V(x) = -2,5 \text{ Tm}$$

i com que en $1 < x < 4$ l'esforç tallant valia -3 Tm , hi ha una disminució (en termes absoluts) de $0,5 \text{ Tm}$, originada per una força exterior de $0,5 \text{ Tm}$, sentit cap a dalt, aplicada en $x = 4$.

Perquè tanquen els esforços tallants ha d'haver una força exterior aplicada en $x = 6$ el valor de la qual és $2,5 \text{ Tm}$, sentit cap a dalt.

Per tant, l'estat de càrregues de la biga serà el que s'indica en la figura 3.25.

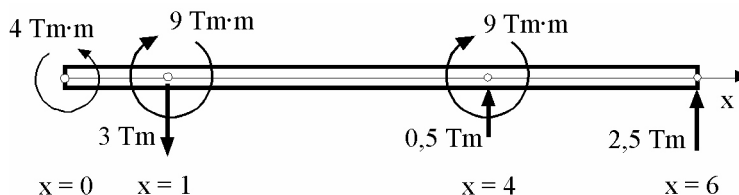


Figura 3.25: Estat de càrrega de la biga de l'exercici 3.6

3.7 Resolució dels exercicis tipus examen

Exercici 3.7 La biga de la figura 3.6 de la pàgina 150 té un pes de $5\,000 \text{ N}$. En un extrem està subjectada per una articulació fixa i en l'altre a un suport llis (de corrons). En la posició que s'indica existeix un petit carretó de pes $4\,000 \text{ N}$, recolzat sobre dues rodes. Es demana: 1) Reaccions en els suports. 2) Diagrama de tallants, acotat. 3) Diagrama de flectors, acotat.

El pes de la biga (5 000 N) es pot considerar com una càrrega uniformement distribuïda. Per tant, es pot reduir a una única força (el pes) aplicada en el centre de gravetat G de la biga. A més a més, com que totes les forces que actuen sobre la biga són verticals, la component horitzontal de la reacció en l'articulació, R_{Ax} , és nul·la. La figura 3.26 mostra el DSL d'aquesta biga les equacions d'equilibri del qual són:

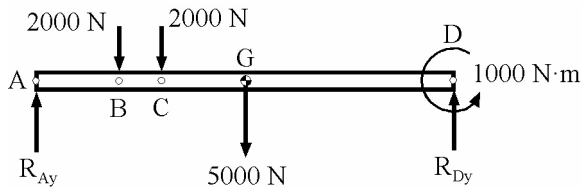


Figura 3.26: DSL de la biga de l'exercici 3.7

$$\sum_{i=1}^5 F_{iy} = 0 = R_{Ay} - 2000 - 2000 - 5000 + R_{Dy} \implies R_{Ay} + R_{Dy} = 9000 \text{ N}$$

$$\sum_{i=1}^5 M_{iA} = 0 = 2000 \cdot 2 + 2000 \cdot 3 + 5000 \cdot 5 - R_{Dy} \cdot 10 - 1000 \implies R_{Dy} = 3400 \text{ N}$$

on s'han pres moments respecte del punt A, sent positius els que tenen el sentit de les agulles del rellotge i es dedueix que $R_{Ay} = 5600 \text{ N}$.

La biga AD té tres trams de càrrega: AB, BC i CD. S'obtidran les expressions analítiques d'esforços tallants i moments flectors pel mètode general o d'integrals. El DSL que indica els trams en què s'ha dividit per analitzar-la es mostra en la figura 3.27, on s'han aplicat les expressions matemàtiques que lliguen els esforços tallants, els moments flectors i les càrregues (vegeu l'apartat 7 del capítol 12 de [13]). La distribució lineal de càrrega del pes de la biga és $q = -500 \text{ N/m}$.

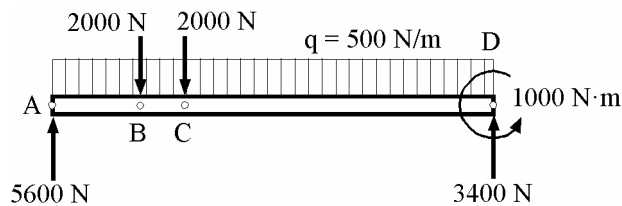


Figura 3.27: DSL de la biga de l'exercici 3.7 on s'indiquen els trams en què s'ha dividit per analitzar-la

TRAM AB ($0 \leq x < 2 \text{ m}$):

$$V_{AB}(x) = \int -500 \cdot dx = -500 \cdot x + C_1 \implies V_{AB}(x) = -500 \cdot x + 5600 \text{ N}$$

Perquè per a $x = 0$, $V_{AB} = 5600 = 0 + C_1$ i, per tant, $C_1 = 5600 \text{ N}$. El moment flector en el tram seria:

$$M_{AB}(x) = \int (-500 \cdot x + 5600) \cdot dx = -250 \cdot x^2 + 5600 \cdot x + C_2 \implies$$

$$\Rightarrow M_{AB}(x) = -250 \cdot x^2 + 5\,600 \cdot x \text{ N} \cdot \text{m}$$

Perquè per a $x = 0$, $M_{AB} = 0 = 0 + 0 + C_2$ i, per tant, $C_2 = 0 \text{ N} \cdot \text{m}$.

TRAM BC ($2 \leq x < 3 \text{ m}$):

$$V_{BC}(x) = \int -500 \cdot dx = -500 \cdot x + C_3 \Rightarrow V_{BC}(x) = -500 \cdot x + 3\,600 \text{ N}$$

Perquè per a $x = 2$, s'ha de complir que $V_{BC}(2) = V_{AB}(2) + Q_{x=2}$ i, per tant, $-1\,000 + C_3 = 4\,600 - 2\,000 \Rightarrow C_3 = 3\,600 \text{ N}$. El moment flector en el tram seria:

$$M_{BC}(x) = \int (-500 \cdot x + 3\,600) \cdot dx = -250 \cdot x^2 + 3\,600 \cdot x + C_4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M_{BC}(x) = -250 \cdot x^2 + 3\,600 \cdot x + 4\,000 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Perquè per a $x = 2$, s'ha de complir que $M_{BC}(2) = M_{AB}(2) + M_{x=2}$ i, per tant, $-1\,000 + 7\,200 + C_4 = -1\,000 + 11\,200 \Rightarrow C_4 = 4\,000 \text{ N} \cdot \text{m}$.

TRAM CD ($3 \leq x < 10 \text{ m}$):

$$V_{CD}(x) = \int -500 \cdot dx = -500 \cdot x + C_5 \Rightarrow V_{CD}(x) = -500 \cdot x + 1\,600 \text{ N}$$

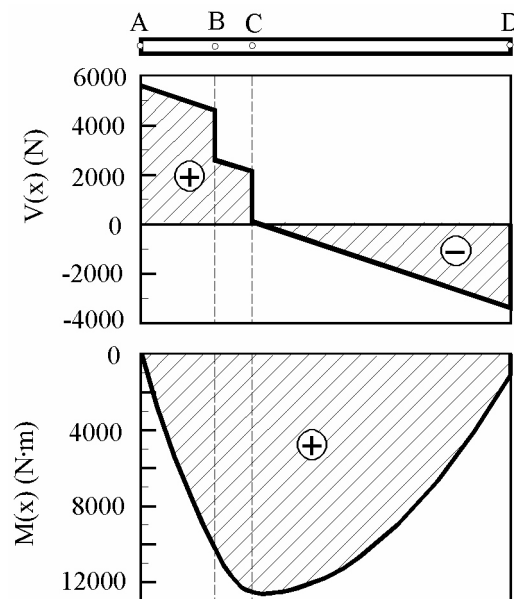


Figura 3.28: Diagrames dels esforços tallants i moments flectors de l'exercici 3.7

Perquè per a $x = 3$, s'ha de complir que $V_{CD}(3) = V_{BC}(3) + Q_{x=3}$ i, per tant, $-1\,500 + C_5 = -1\,500 + 3\,600 - 2\,000 \Rightarrow C_5 = 1\,600 \text{ N}$. El moment flector en el tram seria:

$$M_{CD}(x) = \int (-500 \cdot x + 1\,600) \cdot dx = -250 \cdot x^2 + 1\,600 \cdot x + C_6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M_{CD}(x) = -250 \cdot x^2 + 1\,600 \cdot x + 10\,000 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Perquè per a $x = 3$, s'ha de complir que $M_{CD}(3) = M_{BC}(3) + M_{x=3}$ i, per tant, $4\,800 + C_6 = 10\,800 + 4\,000 \Rightarrow C_6 = 10\,000 \text{ N}\cdot\text{m}$.

La figura 3.28 mostra els diagrames d'esforços tallants i moments flectors, degudament acotats.

Exercici 3.8 Una persona decideix construir-se un trampolí encastant una plataforma de pes lineal 60 kp/m en un bloc de formigó (pes específic $= 2\,500 \text{ kp/m}^3$) d'1 m d'ample, sent la resta de les dimensions les indicades en la figura 3.7 de la pàgina 151. El bloc no té cap tipus d'ancoratge amb el sòl. El pes de la persona és de 100 kp i està situada en l'extrem de la plataforma.

1. Es demana que trobeu el valor de la longitud màxima de la plataforma perquè el trampolí no bolque, suposant un factor de seguretat igual a 2,5.
2. Per a aquest valor de L , trobeu els valors de la reacció i el moment de reacció del bloc de formigó sobre la plataforma.
3. Calculeu els diagrames d'esforços tallants i moments flectors de la plataforma, acotats.

El primer apartat es pot resoldre en termes de les forces que afavoreixen la bolcada o gir de la plataforma (forces de gir) i les que s'hi oposen (forces antigir). La figura 3.29 mostra la situació de les forces que produeixen els moments de gir i antigir d'aquest apartat.

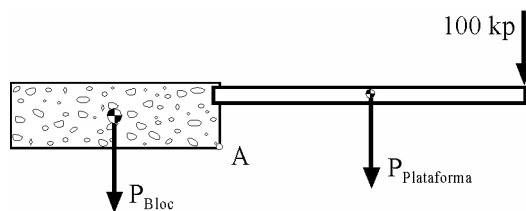


Figura 3.29: DSL de la força de gir i de les forces antigir de l'exercici 3.8

El moment del pes del bloc P_{bloc} respecte del punt A ha de ser equilibrat pel moment de la plataforma $P_{plataforma}$ i del pes de 100 kp respecte del punt A. El primer correspon al $M_{antigir}$ i el segon al M_{gir} . Introduint el factor de seguretat, s'ha de verificar que $M_{antigir} = 2,5 \cdot M_{gir}$.

El pes del bloc es pot obtenir com a producte del pes específic pel volum d'aquest. Per tant:

$$P_{bloc} = 2 \cdot 0,60 \cdot 1 \cdot 2\,500 = 3\,000 \text{ kp} \Rightarrow M_{antigir} = 3\,000 \cdot 1 = 3\,000 \text{ kp} \cdot \text{m}$$

Les forces que afavoreixen la bolcada de la plataforma són el pes d'aquesta, $P_{plataforma} = 60 \cdot L \text{ kp}$, i el pes del nadador, 100 kp . Per tant, el moment de gir serà:

$$M_{gir} = 60 \cdot L \cdot \frac{L}{2} + 100 \cdot L = 30 \cdot L^2 + 100 \cdot L \text{ kp} \cdot \text{m}$$

Aplicant el factor de seguretat s'haurà de complir que:

$$3000 = 2,5 \cdot (30 \cdot L^2 + 100 \cdot L) \Rightarrow 3 \cdot L^2 + 10 \cdot L - 120 = 0$$

l'única solució vàlida de la qual és $L = 4,87$ m, que arrodonirem al valor $L = 4,9$ m.

Per a obtenir la reacció i el moment de reacció del bloc de formigó sobre la plataforma, aplicarem les condicions d'equilibri al DSL que mostra la figura 3.30, on es prendrà moments respecte del punt d'encastament A, sent negatius els que tenen el sentit de moviment de les agulles del rellotge.

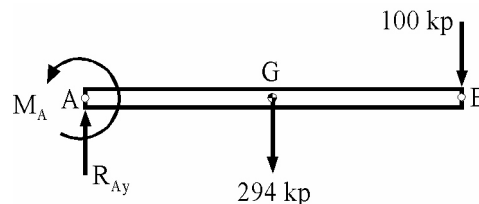


Figura 3.30: DSL de la plataforma de l'exercici 3.8

$$\sum_{i=1}^3 F_{i_y} = 0 = R_{A_y} - 294 - 100 \Rightarrow R_{A_y} = 394 \text{ kp}$$

$$\sum_{i=1}^3 M_{i_A} = 0 = M_A - 294 \cdot 2,45 - 100 \cdot 4,9 \Rightarrow M_A = 1210 \text{ kp} \cdot \text{m}$$

Per a obtenir les relacions dels esforços interns en la plataforma, farem servir el mètode de seccions. La figura 3.31 mostra l'únic tram que té la plataforma, on s'han pres moments respecte del punt de tall, considerant-se negatius els que tenen el sentit de moviment de les agulles del rellotge, per a obtenir les equacions d'equilibri del tram AB.

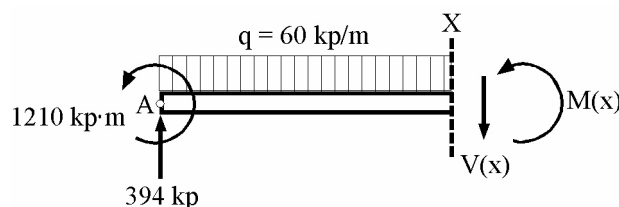


Figura 3.31: DSL del tram de la plataforma de l'exercici 3.8

TRAM AB ($0 \leq x < 4,9$ m):

$$\sum_{i=1}^3 F_{i_y} = 0 = -394 + 60 \cdot x + V_{AB}(x) \Rightarrow V_{AB}(x) = -60 \cdot x + 394 \text{ kp}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^4 M_{i_x} = 0 &= 1210 - 394 \cdot x + 60 \cdot x \cdot \frac{x}{2} + M_{AB}(x) \Rightarrow \\ &\Rightarrow M_{AB}(x) = -30 \cdot x^2 + 394 \cdot x - 1210 \text{ kp} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

Els diagrames d'esforços tallants i moments flectors, degudament acotats, es mostren en la figura 3.32.

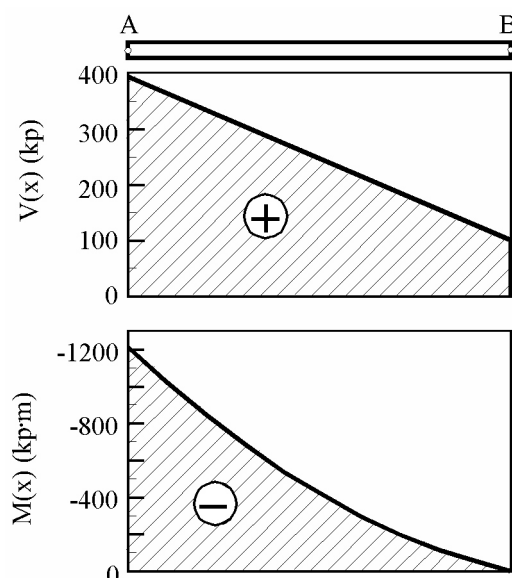


Figura 3.32: Diagrames dels esforços tallants i moments flectors de l'exercici 3.8

Exercici 3.9 En la figura 3.8 de la pàgina 152 es mostra una bastida AE que pot ser assimilada a una biga recta de pes negligible enfront de les reaccions i forces exteriors. La bastida està suportada per dues travesses B i D que fan un contacte llis amb la bastida. Sobre la bastida actuen les següents càrregues: un dipòsit d'aigua, el pes total del qual és de 300 kp, i que pot tractar-se com una càrrega contínua que actua en el tram AB; un obrer de pes 90 kp, assimilable a una càrrega puntual que actua en el punt C; i una caldereta de formigó, recolzada sobre quatre potes, el pes total del qual de 200 kp es considera aplicat en el seu centre. El pes de la caldereta es pot considerar aplicat sobre la bastida com dues càrregues puntuals en els punts D i E, respectivament. Es demana:

1. Reaccions de les travesses B i D sobre la bastida i valors dels esforços en els quatre cables que subjecten les travesses.
2. Diagrama d'esforços tallants, acotat.
3. Diagrama de moments flectors, acotat.

D'acord a allò que diu l'enunciat, la figura 3.33 mostra el DSL de la bastida. La càrrega contínua $Q = 300 \cdot 1 = 300$ kp està aplicada en el punt mitjà del segment \overline{AB} , és a dir, a 0,5 m de A i de B.

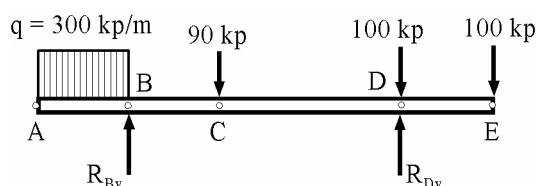


Figura 3.33: DSL de la bastida de l'exercici 3.9

Prenent moments respecte del punt B, sent positius els que tenen el sentit de moviment de les agulles del rellotge, les equacions d'equilibri serien:

$$\sum_{i=1}^6 F_{iy} = 0 = -300 + R_{By} - 90 - 100 + R_{Dy} - 100 \implies R_{By} + R_{Dy} = 590 \text{ kp}$$

$$\sum_{i=1}^5 M_{iA} = 0 = 300 \cdot 0,5 - 90 \cdot 1 - 100 \cdot 3 + R_{Dy} \cdot 3 - 100 \cdot 4 \implies R_{Dy} = 213 \text{ kp}$$

deduint-se que $R_{By} = 377 \text{ kp}$. D'altra banda, aquests resultats impliquen que els dos cables de B suporten 188,5 kp cadascú d'ells i els dos cables de D suporten 106,5 kp cadascú d'ells.

La biga AE té quatre trams de càrrega: AB, BC, CD i DE. S'obtidran les expressions analítiques d'esforços tallants i moments flectors pel mètode de seccions. El DSL que indica els trams en què s'ha dividit per analitzar-la es mostra en la figura 3.34, on s'han aplicat les condicions d'equilibri i s'han pres moments respecte del punt de tall en cada tram, sent negatius els que tenen el sentit de les agulles del rellotge. La distribució lineal de càrrega del dipòsit d'aigua és $q = -300 \text{ kp/m}$.

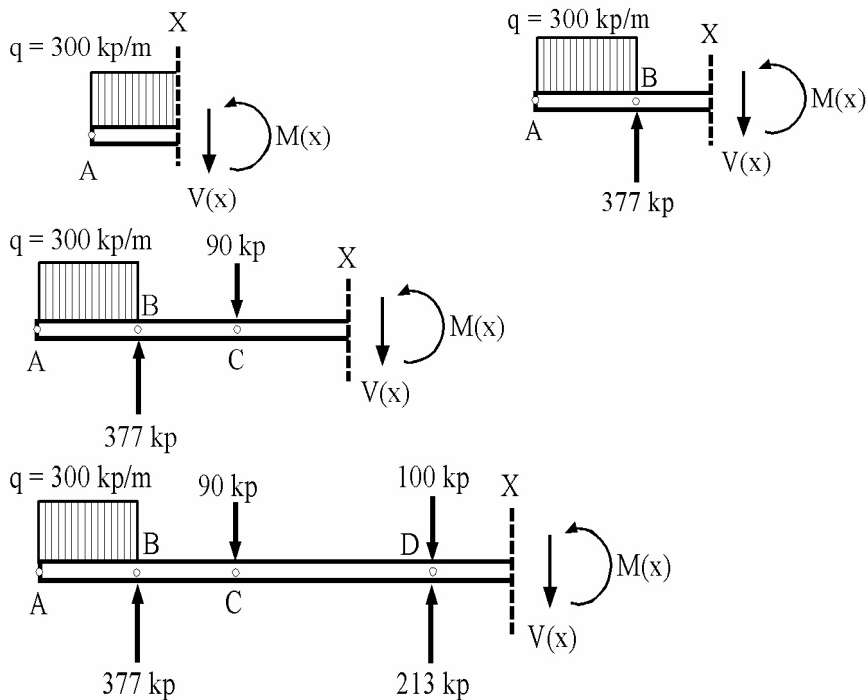


Figura 3.34: DSL de cada tram de la bastida de l'exercici 3.9

TRAM AB ($0 \leq x < 1 \text{ m}$), corresponent a la part superior esquerra de la figura 3.34:

$$\sum_{i=1}^2 F_{iy} = 0 = 300 \cdot x + V_{AB}(x) \implies V_{AB}(x) = -300 \cdot x \text{ kp}$$

$$\sum_{i=1}^2 M_{ix} = 0 = 300 \cdot x \cdot \frac{x}{2} + M_{AB}(x) \implies M_{AB}(x) = -150 \cdot x^2 \text{ kp} \cdot \text{m}$$

TRAM BC ($1 \leq x < 2$ m), corresponent a la part superior dreta de la figura 3.34:

$$\sum_{i=1}^3 F_{i_y} = 0 = 300 - 377 + V_{BC}(x) \implies V_{BC}(x) = 77 \text{ kp}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 M_{i_x} = 0 &= 300 \cdot (x - 0,5) - 377 \cdot (x - 1) + M_{BC}(x) \implies \\ &\implies M_{BC}(x) = 77 \cdot x - 227 \text{ kp} \cdot m \end{aligned}$$

TRAM CD ($2 \leq x < 4$ m), corresponent a la part central de la figura 3.34:

$$\sum_{i=1}^4 F_{i_y} = 0 = 300 - 377 + 90 + V_{CD}(x) \implies V_{CD}(x) = -13 \text{ kp}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^4 M_{i_x} = 0 &= 300 \cdot (x - 0,5) - 377 \cdot (x - 1) + 90 \cdot (x - 2) + M_{CD}(x) \implies \\ &\implies M_{CD}(x) = -13 \cdot x - 47 \text{ kp} \cdot m \end{aligned}$$

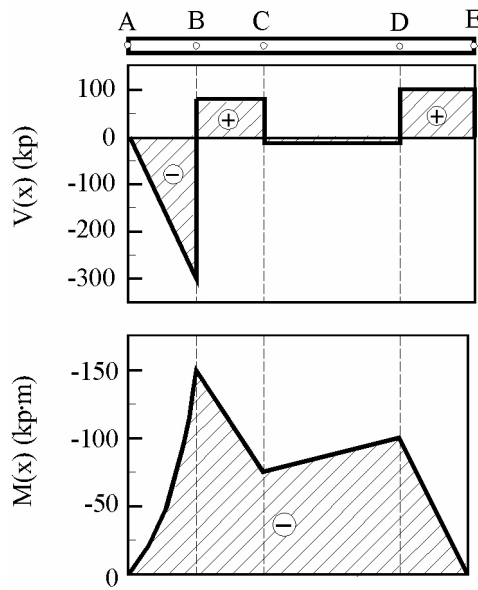


Figura 3.35: Diagrames dels esforços tallants i moments flectors de l'exercici 3.9

TRAM DE ($4 \leq x < 5$ m), corresponent a la part inferior de la figura 3.34:

$$\sum_{i=1}^6 F_{i_y} = 0 = 300 - 377 + 90 + 100 - 213 + V_{DE}(x) \implies V_{DE}(x) = 100 \text{ kp}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^5 M_{i_x} = 0 &= 300 \cdot (x - 0,5) - 377 \cdot (x - 1) + 90 \cdot (x - 2) + (100 - 213) \cdot (x - 4) + \\ &+ M_{DE}(x) \implies M_{DE}(x) = 100 \cdot x - 499 \text{ kp} \cdot m \end{aligned}$$

NOTA: Adoneu-vos que el flector en $x = 5$ ha de ser nul perquè no existeix cap moment puntual en l'extrem dret de la bastida. A causa dels truncaments decimals el valor matemàtic no dóna zero exactament sinó un.

Els diagrames d'esforços tallants i moments flectors, degudament acotats, es mostren en la figura 3.35.

Exercici 3.10 En la figura 3.9 de la pàgina 152 es mostren dues bigues unides per un cable en el punt B. Els suports A i F són fixos i el suport en C (comú a les dues bigues) és de corrons. Les càrregues que actuen sobre el conjunt són les indicades. Es demana que trobeu: 1) La tensió en el cable B i les reaccions en els suports A, C i F. 2) Diagrama d'esforços tallants i moments flectors de la biga AD, acotat.

Per a obtenir la tensió en el cable B i les reaccions en els suports A, C i F, es construeixen dos DSL: un per a la biga ABD (part esquerra de la figura 3.36) i altre per a la biga BCEF (part dreta de la figura 3.36).

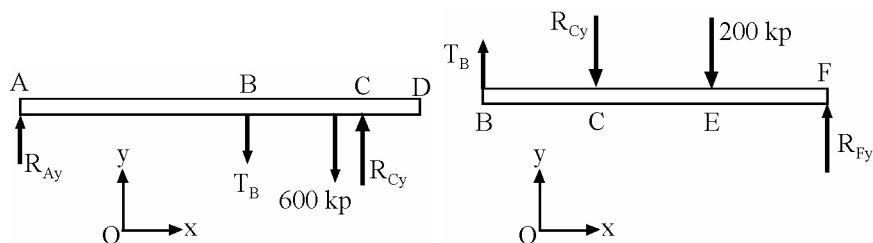


Figura 3.36: DSL de les dues bigues de l'exercici 3.10

La càrrega distribuïda que actua en la biga ABD s'ha substituït per la seua resultant de 600 kp, aplicada en el punt mitjà del segment \overline{BD} . Prenent moments respecte del punt A, sent positius els que tenen el sentit de moviment de les agulles del rellotge, les equacions d'equilibri serien:

$$\sum_{i=1}^4 F_{iy} = 0 = R_{Ay} - T_B - 600 + R_{Cy} \quad (3.1)$$

$$\sum_{i=1}^3 M_{iA} = 0 = T_B \cdot 4 + 600 \cdot 5,5 - R_{Cy} \cdot 6 \quad (3.2)$$

Per a poder resoldre l'equilibri anterior necessitem les equacions d'equilibri de la biga BCEF. Prenent moments respecte del punt F, sent positius els que tenen el sentit de moviment de les agulles del rellotge, s'obté que:

$$\sum_{i=1}^4 F_{iy} = 0 = T_B - R_{Cy} - 200 + R_{Fy} \quad (3.3)$$

$$\sum_{i=1}^3 M_{iF} = 0 = T_B \cdot 6 - R_{Cy} \cdot 4 - 200 \cdot 2 \quad (3.4)$$

De la combinació de les expressions (3.2) i (3.4) s'obté que $T_B = 780$ kp i $R_{C_y} = 1070$ kp. Substituint aquests valors en (3.1) i (3.3), $R_{A_y} = 310$ kp i $R_{F_y} = 490$ kp.

La biga ABD té tres trams de càrrega: AB, BC i CD. S'obtiniran les expressions analítiques d'esforços tallants i moments flectors pel mètode general o d'integrals. El DSL que indica els trams en què s'ha dividit per analitzar-la es mostra en la figura 3.37, on s'han aplicat les expressions matemàtiques que lliguen els esforços tallants, els moments flectors i les càrregues.

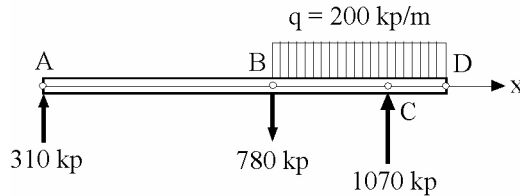


Figura 3.37: DSL de la biga ABD de l'exercici 3.10 on s'indiquen els trams en què s'ha dividit per analitzar-la

TRAM AB ($0 \leq x < 4$ m):

$$V_{AB}(x) = \text{constant} = R_{A_y} \implies V_{AB}(x) = 310 \text{ kp}$$

Perquè $q = 0$ i, per tant, el tallant en $x = 0$ ha de ser igual al valor de la reacció vertical en A. El moment flector en el tram seria:

$$M_{AB}(x) = \int 310 \cdot dx = 310 \cdot x + C_1 \implies M_{AB}(x) = 310 \cdot x \text{ kp} \cdot \text{m}$$

Perquè per a $x = 0$, $M_{AB} = 0 = 0 + 0 + C_1$ i, per tant, $C_1 = 0$ kp·m.

TRAM BC ($4 \leq x < 6$ m):

$$V_{BC}(x) = \int -200 \cdot dx = -200 \cdot x + C_2 \implies V_{BC}(x) = -200 \cdot x + 330 \text{ kp}$$

Perquè per a $x = 4$, s'ha de complir que $V_{BC}(4) = V_{AB}(4) + Q_{x=4}$ i, per tant, $-200 \cdot 4 + C_2 = 310 - 780 \implies C_2 = 330$ kp. El moment flector en el tram seria:

$$\begin{aligned} M_{BC}(x) &= \int (-200 \cdot x + 330) \cdot dx = -100 \cdot x^2 + 330 \cdot x + C_3 \implies \\ &\implies M_{BC}(x) = -100 \cdot x^2 + 330 \cdot x + 1520 \text{ kp} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

Perquè per a $x = 4$, s'ha de complir que $M_{BC}(4) = M_{AB}(4) + M_{x=4}$ i, per tant, $-100 \cdot 4^2 + 330 \cdot 4 + C_3 = 310 \cdot 4 \implies C_3 = 1520$ kp·m.

TRAM CD ($6 \leq x < 7$ m):

$$V_{CD}(x) = \int -200 \cdot dx = -200 \cdot x + C_4 \implies V_{CD}(x) = -200 \cdot x + 1400 \text{ kp}$$

Perquè per a $x = 6$, s'ha de complir que $V_{CD}(6) = V_{BC}(6) + Q_{x=6}$ i, per tant, $-200 \cdot 6 + C_4 = -200 \cdot 6 + 330 + 1070 \implies C_4 = 1400$ kp. El moment flector en el tram seria:

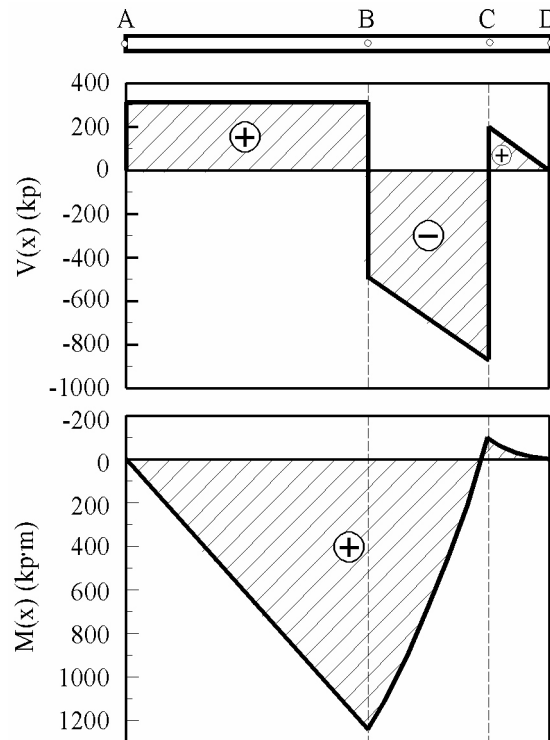


Figura 3.38: Diagrames dels esforços tallants i moments flectors de l'exercici 3.10

$$M_{CD}(x) = \int (-200 \cdot x + 1400) \cdot dx = -100 \cdot x^2 + 1400 \cdot x + C_5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M_{CD}(x) = -100 \cdot x^2 + 1400 \cdot x - 4900 \text{ kp} \cdot \text{m}$$

Perquè per a $x = 6$, s'ha de complir que $M_{CD}(6) = M_{BC}(6) + M_{x=6}$ i, per tant, $-100 \cdot 6^2 + 1400 \cdot 6 + C_5 = -100 \cdot 6^2 + 330 \cdot 6 + 1520 \Rightarrow C_5 = -4900$ kp·m. Com a comprovació, si es calcula $M_{CD}(7) = 0$, tal com s'ha de complir perquè no hi ha cap moment puntual aplicat en l'extrem D de la biga.

La figura 3.38 mostra els diagrames d'esforços tallants i moments flectors, degudament acotats.

Exercici 3.11 Un sistema d'informació per al trànsit en carretera, consisteix en dos panells lluminosos de pes 100 kp cadascun, muntats sobre una biga AB de 1600 kp de pes (figura 3.10 de la pàgina 153). Aquesta biga està soldada a un pal vertical CD, encastat en el sòl, de pes 5000 kp. Es demana:

1. Reaccions del pal vertical sobre la biga AB en el punt A.
2. Reaccions del sòl sobre el pal vertical CD.
3. Diagrames d'esforços tallants i moments flectors, acotats, de la biga AB.
4. Diagrames d'esforços tallants i moments flectors, acotats, de la biga CD.

La figura 3.39 mostra el DSL de la biga AB, on el pes d'aquesta està aplicat en el punt mitjà, a 3,75 m de l'encastament A. Prenent moments respecte del punt A, sent negatius els que tenen el sentit de moviment de les agulles del rellotge, s'han obtingut les equacions d'equilibri.

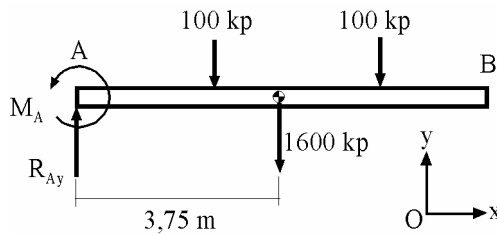
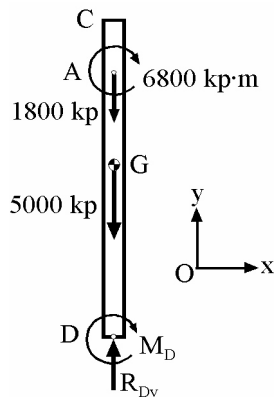


Figura 3.39: DSL de la biga AB de l'exercici 3.11

$$\sum_{i=1}^4 F_{i_y} = 0 = R_{A_y} - 100 - 1600 - 100 \implies R_{A_y} = 1800 \text{ kp}$$

$$\sum_{i=1}^4 M_{i_A} = 0 = M_A - 100 \cdot 2,5 - 1600 \cdot 3,75 - 100 \cdot 5,5 \implies M_A = 6800 \text{ kp} \cdot \text{m}$$

La figura 3.40, part esquerra, mostra el DSL de la biga CD, on el pes d'aquesta està aplicat en el punt mitjà, a 3 m de l'encastament D. Prenent moments respecte del punt D, sent positius els que tenen el sentit de moviment de les agulles del rellotge, s'han obtingut les equacions d'equilibri (part dreta en la figura 3.40).



$$\sum_{i=1}^3 F_{i_y} = 0 = R_{D_y} - 1800 - 5000 \implies$$

$$\implies R_{D_y} = 1800 \text{ kp}$$

$$\sum_{i=1}^2 M_{i_D} = 0 = M_D + 6800 \implies$$

$$\implies M_D = -6800 \text{ kp} \cdot \text{m}$$

Figura 3.40: DSL de la biga DC de l'exercici 3.11 i equacions d'equilibri d'aquesta

La biga AB té tres trams de càrrega: AE, EF i FB. S'obtingran les expressions analítiques d'esforços tallants i moments flectors pel mètode general o d'integrals. El DSL que indica els trams en què s'ha dividit per analitzar-la es mostra en la figura 3.41, on s'han aplicat les expressions matemàtiques que lliuen els esforços tallants, els moments flectors i les càrregues. El pes de la biga AB és una càrrega contínua la densitat lineal de la qual és $q = 1600/7,5 = 213 \text{ kp/m}$.

TRAM AE ($0 \leq x < 2,5 \text{ m}$):

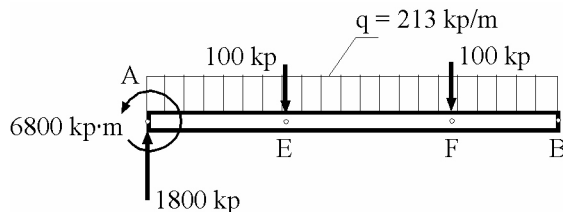


Figura 3.41: DSL de la biga AB de l'exercici 3.11 on s'indiquen els trams en què s'ha dividit per analitzar-la

$$V_{AE}(x) = \int -213 \cdot dx = -213 \cdot x + C_1 \implies V_{AE}(x) = -213 \cdot x + 1800 \text{ kp}$$

Perquè per a $x = 0$, el tallant ha de ser igual al valor de la reacció vertical en A, és a dir 1800 kp. El moment flector en el tram seria:

$$\begin{aligned} M_{AE}(x) &= \int (-213 \cdot x + 1800) \cdot dx = -106,7 \cdot x^2 + 1800 \cdot x + C_2 \implies \\ &\implies M_{AE}(x) = -106,7 \cdot x^2 + 1800 \cdot x - 6800 \text{ kp} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

Perquè per a $x = 0$, $M_{AE} = -6800 = 0 + 0 + C_2$ i, per tant, $C_2 = -6800$ kp·m.

TRAM EF ($2,5 \leq x < 5,5$ m):

$$V_{EF}(x) = \int -213 \cdot dx = -213 \cdot x + C_3 \implies V_{EF}(x) = -213 \cdot x + 1700 \text{ kp}$$

Perquè per a $x = 2,5$, s'ha de complir que $V_{EF}(2,5) = V_{AE}(2,5) + Q_{x=2,5}$ i, per tant, $-213 \cdot 2,5 + C_3 = -213 \cdot 2,5 + 1800 - 100 \implies C_3 = 1700$ kp. El moment flector en el tram seria:

$$\begin{aligned} M_{EF}(x) &= \int (-213 \cdot x + 1700) \cdot dx = -106,7 \cdot x^2 + 1700 \cdot x + C_4 \implies \\ &\implies M_{EF}(x) = -106,7 \cdot x^2 + 1700 \cdot x - 6550 \text{ kp} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

Perquè per a $x = 2,5$, s'ha de complir que $M_{EF}(2,5) = M_{AE}(2,5) + M_{x=2,5}$ i, per tant, $1700 \cdot 2,5 + C_4 = 1800 \cdot 2,5 - 6800 \implies C_4 = -6550$ kp·m.

TRAM FB ($5,5 \leq x < 7,5$ m):

$$V_{FB}(x) = \int -213 \cdot dx = -213 \cdot x + C_5 \implies V_{FB}(x) = -213 \cdot x + 1600 \text{ kp}$$

Perquè per a $x = 5,5$, s'ha de complir que $V_{FB}(5,5) = V_{EF}(5,5) + Q_{x=5,5}$ i, per tant, $-213 \cdot 5,5 + C_5 = -213 \cdot 5,5 + 1700 - 100 \implies C_5 = 1600$ kp. El moment flector en el tram seria:

$$\begin{aligned} M_{FB}(x) &= \int (-213 \cdot x + 1600) \cdot dx = -106,7 \cdot x^2 + 1600 \cdot x + C_6 \implies \\ &\implies M_{FB}(x) = -106,7 \cdot x^2 + 1600 \cdot x - 6000 \text{ kp} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

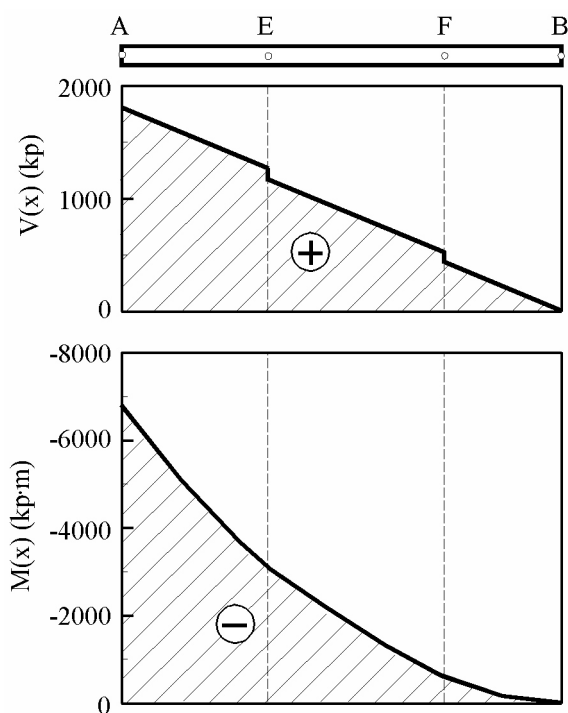


Figura 3.42: Diagrames dels esforços tallants i moments flectors de l'exercici 3.11 per a la biga AB

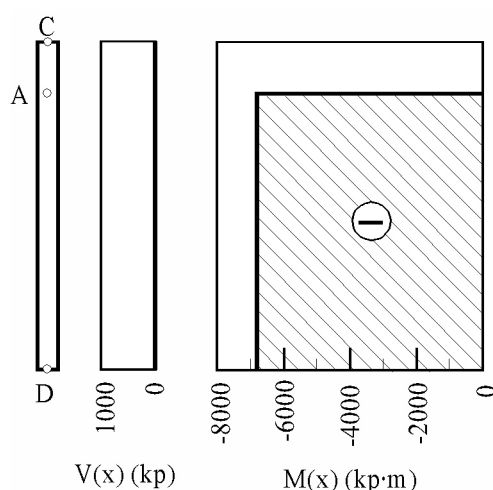


Figura 3.43: Diagrames dels esforços tallants i moments flectors de l'exercici 3.11 per a la biga DC

Perquè per a $x = 5,5$, s'ha de complir que $M_{FB}(5,5) = M_{EF}(5,5) + M_{x=5,5}$ i, per tant, $1600 \cdot 5,5 + C_6 = 1700 \cdot 5,5 - 6550 \Rightarrow C_6 = -6000 \text{ kp}\cdot\text{m}$.

La figura 3.42 mostra els diagrames d'esforços tallants i moments flectors, degudament acotats.

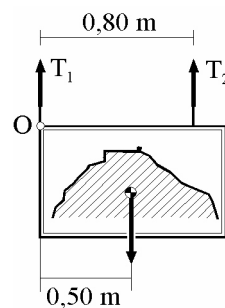
En la biga vertical DC no hi ha tallants perquè totes les càrregues són verticals, és a dir, $V_{DC}(x) = 0 \text{ kp}$ per a $0 \leq x < 6 \text{ m}$. Pel que fa als moments flectors en aquesta biga, en el tram DA, $0 \leq x < 5 \text{ m}$, hi ha un flector constant de valor $M_{DA}(x) = -6800 \text{ kp}\cdot\text{m}$ fins arribar al punt A on s'anul·la amb el moment de reacció en aquest punt. És a dir, $M_{AC}(x) = 0 \text{ kp}\cdot\text{m}$ per a $6 \leq x < 7$

m.

La figura 3.43 mostra els diagrames d'esforços tallants i moments flectors, degudament acotats.

Exercici 3.12 La biga encastada de la figura 3.11 de la pàgina 154 té un pes propi de 900 kp. En un extrem penja de dos cables un anunci de 400 kp de pes. Es demana que trobeu: 1) Tensions en els cables, calculades analíticament i gràficament. 2) Reaccions en els suports. 3) Diagrames d'esforços tallants i de moments flectors, acotats.

La figura 3.44, part esquerra, mostra el DSL dels cables que sostenen l'anunci, on el pes d'aquest està aplicat en el seu centre de gravetat, a 0,50 m de la vertical que passa pel punt O. Prenent moments respecte del punt O, sent positius els que tenen el sentit de moviment de les agulles del rellotge, s'han obtingut les equacions d'equilibri (part dreta en la figura 3.44).



$$\sum_{i=1}^3 F_{iy} = 0 = T_1 + T_2 - 400 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_1 + T_2 = 400$$

$$\sum_{i=1}^2 M_{iD} = 0 = 400 \cdot 0,50 + T_2 \cdot 0,80 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_2 = 150 \text{ kp}; T_1 = 250 \text{ kp}$$

Figura 3.44: DSL de l'anunci de l'exercici 3.12 i equacions d'equilibri d'aquest

Per a la resolució gràfica s'utilitzarà el polígon de forces i el polígon funicular. Les tensions dels cables T_1 i T_2 han de ser paral·leles al pes de l'anunci i tallen el polígon funicular en dos punts la unió dels quals dona la recta a' . Traçant en el polígon de forces una polar que és paral·lela a a' , tallarà la resultant en un punt tal que permet dibuixar les dues tensions que buscàvem (vegeu la figura 3.45). Els valors de les tensions, d'acord a l'escala utilitzada per al polígon de forces, són els mateixos que s'han obtingudes analíticament.

Per a determinar les reaccions en els suports, s'obtenen les equacions d'equilibri d'acord al DSL que mostra la figura 3.46. El pes de la biga s'aplica en el seu centre de gravetat. Els moments s'han calculat respecte del punt A, sent negatius els que tenen el sentit de moviment de les agulles del rellotge.

$$\sum_{i=1}^4 F_{iy} = 0 = R_{Ay} - 900 - 150 - 250 \Rightarrow R_{Ay} = 1300 \text{ kp}$$

$$\sum_{i=1}^4 M_{iA} = 0 = M_A - 900 \cdot 1,5 - 150 \cdot 2 - 250 \cdot 2,8 \Rightarrow M_A = 2350 \text{ kp} \cdot \text{m}$$

L'estat de càrrega de la biga es mostra en la figura 3.47, on s'explicita el fet que el pes de la biga és una càrrega contínua de densitat lineal constant $q = 300 \text{ kp/m}$. Es resol per les relacions entre $V(x)$, $M(x)$ i $q(x)$ en cada tram.

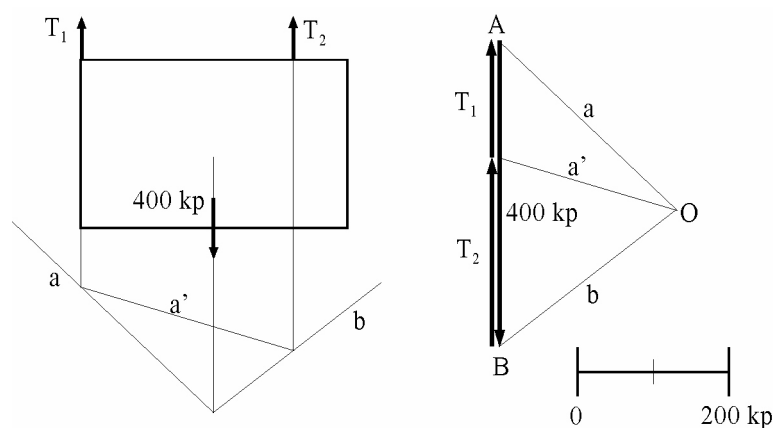


Figura 3.45: Polígon de forces i polígon funicular per a determinar les tensions dels cables de l'exercici 3.12

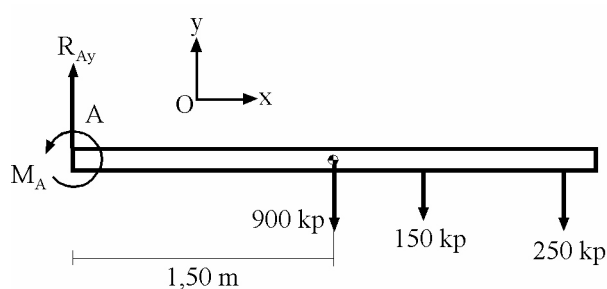


Figura 3.46: DSL de la biga encastada de l'exercici 3.12

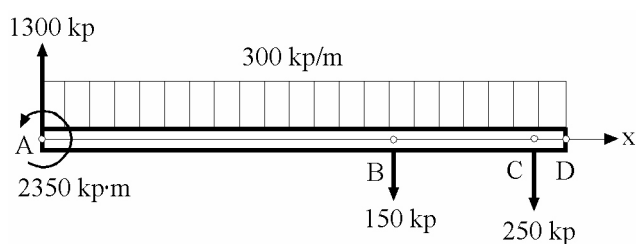


Figura 3.47: DSL de la biga AD de l'exercici 3.12 on s'indiquen els trams en què s'ha dividit per analitzar-la

TRAM AB ($0 \leq x < 2$ m):

$$V_{AB}(x) = \int -300 \cdot dx = -300 \cdot x + C_1 \implies V_{AB}(x) = -300 \cdot x + 1300 \text{ kp}$$

Perquè per a $x = 0$, $V_{AB} = 1300 = 0 + C_1$ i, per tant, $C_1 = 1300$ kp. El moment flector en el tram seria:

$$M_{AB}(x) = \int (-300 \cdot x + 1300) \cdot dx = -150 \cdot x^2 + 1300 \cdot x + C_2 \implies \\ \implies M_{AB}(x) = -150 \cdot x^2 + 1300 \cdot x - 2350 \text{ kp} \cdot \text{m}$$

Perquè per a $x = 0$, $M_{AB} = -2350 = 0 + 0 + C_2$ i, per tant, $C_2 = -2350$ kp·m.

TRAM BC ($2 \leq x < 2,80$ m):

$$V_{BC}(x) = \int -300 \cdot dx = -300 \cdot x + C_3 \Rightarrow V_{BC}(x) = -300 \cdot x + 1150 \text{ kp}$$

Perquè per a $x = 2$, s'ha de complir que $V_{BC}(2) = V_{AB}(2) + Q_{x=2}$ i, per tant, $-600 + C_3 = -600 + 1300 - 150 \Rightarrow C_3 = 1150$ kp. El moment flector en el tram seria:

$$\begin{aligned} M_{BC}(x) &= \int (-300 \cdot x + 1150) \cdot dx = -150 \cdot x^2 + 1150 \cdot x + C_4 \Rightarrow \\ &\Rightarrow M_{BC}(x) = -150 \cdot x^2 + 1150 \cdot x - 2050 \text{ kp} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

Perquè per a $x = 2$, s'ha de complir que $M_{BC}(2) = M_{AB}(2) + M_{x=2}$ i, per tant, $1150 \cdot 2 + C_4 = 1300 \cdot 2 - 2350 \Rightarrow C_4 = 2050$ kp·m.

TRAM CD ($2,80 \leq x < 3$ m):

$$V_{CD}(x) = \int -300 \cdot dx = -300 \cdot x + C_5 \Rightarrow V_{CD}(x) = -300 \cdot x + 900 \text{ kp}$$

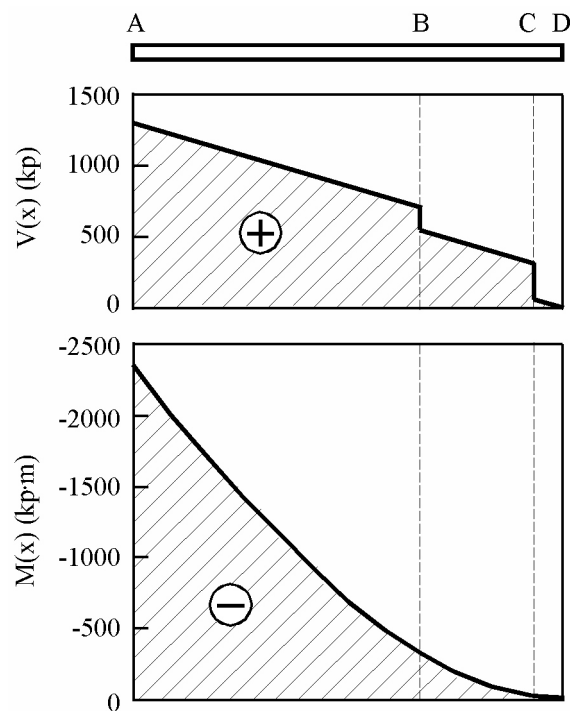


Figura 3.48: Diagrames dels esforços tallants i moments flectors de l'exercici 3.12

Perquè per a $x = 2,80$, s'ha de complir que $V_{CD}(2,80) = V_{BC}(2,80) + Q_{x=2,80}$ i, per tant, $C_5 = 1150 - 250 \Rightarrow C_5 = 900$ kp. El moment flector en el tram seria:

$$\begin{aligned} M_{CD}(x) &= \int (-300 \cdot x + 900) \cdot dx = -150 \cdot x^2 + 900 \cdot x + C_6 \Rightarrow \\ &\Rightarrow M_{CD}(x) = -150 \cdot x^2 + 900 \cdot x - 1350 \text{ kp} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

Perquè per a $x = 2,80$, s'ha de complir que $M_{CD}(2,80) = M_{BC}(2,80) + M_{x=2,80}$ i, per tant, $900 \cdot 2,8 + C_6 = 1\,150 \cdot 2,8 - 2\,050 \implies C_6 = 1\,350 \text{ kp}\cdot\text{m}$.

La figura 3.48 mostra els diagrames d'esforços tallants i moments flectors, degudament acotats.

Seqüències en la resolució de problemes

La resolució de problemes és una part fonamental en l'ensenyament de les ciències, en general, i de la física, en particular. Un percentatge important de l'alumnat té moltes dificultats en aquest aspecte, a vegades relacionades amb qüestions bàsiques en el procés de resolució dels problemes. Altres elements que cal tenir en compte són: la metodologia, les idees prèvies, l'enteniment conceptual o l'anàlisi del procés realitzat.

Encara que cada estudiant té un esquema d'organització únic, i que una altra persona pot tenir dificultats per utilitzar-lo o entendre'l, es poden definir un conjunt de fases necessàries en la resolució de problemes. És cert que l'alumnat brillant busca el seu patró però la major part d'aquest necessita models per a imitar.

Una adaptació al nostre alumnat i assignatura de la seqüència en la resolució de problemes pot ser la següent [11]:

1. Extraure la informació important.

- Llegir l'enunciat amb molta atenció.
- Indicar les dades, les incògnites, les condicions.
- Definir l'apartat o apartats en què es divideix.
- Relacionar els conceptes vectorials o de geometria de masses implicats en els exercicis d'estàtica.

2. Organitzar la resolució.

- Formular les hipòtesis adequades.
- Identificar els conceptes útils.
- Fer representacions gràfiques dels enunciats.
- És una situació nova o s'assembla a una altra ja resolta?
- Conèixer les lleis implicades i les seues definicions.
- Si no sap resoldre'l, tractar de simplificar-lo plantejant les hipòtesis que calguen.
- Deduir si necessitem més dades o n'hi ha de més.
- En acabar aquesta fase, s'ha de tenir un pla de resolució.

3. Executar la resolució.

- Resoldre l'equació o sistema d'equacions.
- Comprovar cada part del problema, com les unitats, el càlcul numèric ...
- Quantes solucions són possibles?

4. Reflexió crítica.

- Té sentit el resultat?
- Pensar en altres possibilitats i aplicacions del problema modificant algunes condicions inicials.
- Hi ha un altre mètode de resolució?

Amb aquesta seqüència no pretenem donar una recepta universal per a resoldre problemes. De fet, no cal utilitzar totes les etapes anteriors ni plantejar-se les mateixes qüestions. En qualsevol cas, pot ser una guia per a iniciar l'aprenentatge en la resolució de problemes i el descobriment de la seqüència particular de cada estudiant.

La metodologia ABP/PBL

La metodologia de l'aprenentatge basat en problemes (ABP) o *problem based learning* (PBL) tracta d'abordar els objectius relatius als coneixements de l'assignatura i, a més a més, afavorir el desenvolupament d'habilitats i competències relatives a la capacitat de treballar en grup, de recerca i validació de la informació, d'habilitats comunicatives, etc. L'equip de treball haurà de desenvolupar una seqüència d'activitats al voltant de la situació plantejada:

- Delimitació del problema que s'ha de resoldre.
- Recerca d'informació i recursos al seu abast.
- Disseny d'un pla de treball coordinat.
- Repartiment de les tasques i desenvolupament del pla.
- Exposició de resultats o conclusions.
- Realització d'un document que plasme tota la tasca feta.

L'ABP és un mètode docent en què l'alumnat és protagonista del seu propi aprenentatge. En aquest mètode és tan important l'aprenentatge dels coneixements com l'adquisició de les habilitats i actituds. Per això el disseny dels problemes ha de garantir que l'alumnat pugui treballar de forma autònoma i sàpia descobrir els elements necessaris per a poder respondre al problema plantejat. El professorat es converteix en un guia i ha de valorar si s'han aconseguit els objectius d'aprenentatge prevists.

Un problema en el ABP pot ser una qüestió plantejada pel professorat la resolució de la qual implica una reflexió i presa de decisions per part de l'alumnat relacionades amb:

- Els paràmetres necessaris per a resoldre el problema (en un projecte d'edificació real no es coneixen totes les dades sinó que s'han de determinar aquells valors que puguin ser acceptables).
- Les possibilitats per a donar una solució al problema (pot ser habitual que hi haja diverses solucions possibles).
- La planificació de les tasques per a arribar a una solució del problema.
- La recerca de la solució adequada dins del procés de resolució del problema (modificació de les variables per tal de trobar la millor resposta possible).

Els problemes ABP no segueixen una estratègia com la indicada en l'apèndix A, sinó que tracta d'aconseguir una major implicació de l'alumnat, mitjançant situacions properes al seu entorn professional; una presa de decisions, mitjançant la recerca de la millor solució al problema; i un treball cooperatiu dins d'un grup mitjançant la discussió i el repartiment de tasques per a resoldre la qüestió plantejada.

En resum, l'alumnat construeix el seu propi aprenentatge amb una participació activa per a aconseguir els objectius d'aprenentatge i el professorat és un guia d'aquest aprenentatge. Exemples d'aquesta metodologia poden trobar-se en [4] on hi ha altres referències bibliogràfiques relacionades amb el ABP/PBL. També són interessants els articles [9] i [5] o el llibre [11] per tal de conèixer el procés d'ensenyament de les ciències mitjançant la resolució de problemes.

No podem parlar de **la solució** als problemes 1.32, 1.33 i 1.34 perquè **hi ha moltes solucions i totes poden ser correctes**. Tanmateix, es poden comparar les característiques d'aquests tipus de problemes amb els enunciats clàssics que es poden trobar en els llibres de física. Per exemple, l'exercici 8.13 de [13] és semblant al problema 1.32, el qual es pot considerar com una possible solució i permet plantejar-se les preguntes que s'han de respondre per a proposar-ne una altra. Alguns elements no reflectits són el termini per finalitzar l'obra i les obligacions legals exigides per a poder considerar la possible solució, qüestions molt importants en la tasca professional d'aquest alumnat. Pel que fa als problemes 1.33 i 1.34, també podem trobar exemples en [13] com l'exercici 63C (pertanyent a la secció d'exercicis complementaris) i l'exercici 11.17, respectivament.

Els problemes tipus investigació de la secció 2.5 s'han tret de fets reals i s'han adaptat a exercicis proposats en exàmens per a l'assignatura de Fonaments Físics d'Arquitectura. En la construcció de pavellons esportius, grans superfícies o biblioteques, per exemple, és habitual l'ús d'estructures articulades planes de pocs elements (barres) distints per a cobrir una longitud gran. El problema 2.27 n'és un exemple i els exercicis 11.3R i 86C (pertanyent a la secció d'exercicis complementaris) de [13] seria semblant a l'estructura articulada plana que es podria utilitzar per a la seua construcció. Per exemple, 11.9R de [13] és semblant al problema 2.28 i s'han proposat exercicis semblants en altres exàmens d'avaluació. Mentre que el problema 2.29 s'ha tret d'una situació real (estructura articulada espacial) i s'ha adaptat a un exercici d'avaluació (estructura articulada plana).

Els problemes tipus investigació de la secció 3.5 són adaptacions d'exercicis proposats en exàmens per a l'assignatura de Fonaments Físics d'Arquitectura. És fàcil identificar el problema 3.13 amb l'exercici 3.8, el problema 3.14 amb l'exercici 3.11, i el problema 3.15 amb l'exercici 3.5. Es tractarien de possibles solucions als problemes oberts proposats en aquesta secció.

Magnituds, unitats i dimensions

Qualsevol branca de la ciència i de la tècnica ha d'entendre com a fonamental la utilització de diferents magnituds, sistemes d'unitats i la dimensió homogènia de les relacions entre les diferents magnituds que apareixen en tot problema (ja siga un problema de llapis i paper o un problema professional concret). Encara que s'ha estudiat en els nivells previs als estudis universitaris, també l'experiència ens demostra que molts errors són conseqüència del fet de no entendre el significat de la homogeneïtat d'una expressió, comprendre malament el significat de les magnituds o fer equivocadament els canvis d'unitats.

Podem definir **magnitud** com tot allò que es puga mesurar. La massa d'un cos, la longitud, la durada d'un esdeveniment, la temperatura d'un recinte, etc. són magnituds físiques perquè es poden mesurar amb l'ajuda dels aparells adequats. Mesurar una magnitud és expressar-la com una quantitat de vegades una altra magnitud de la mateixa classe, presa convencionalment com a unitat (patró). Per exemple, si es diu que la força aplicada sobre un element estructural és de $F = 2500 \text{ N}$, F és el símbol de la magnitud física força i 2500 és el valor numèric de la força aplicada expressada en N.

A Espanya, el **Sistema Internacional d'Unitats**, o SI abreujadament, és el sistema d'ús obligatori legalment establert pel Reial Decret 1317/1989, de 27 d'octubre, pel qual s'estableixen unitats legals de mesura (*Butlletí Oficial de l'Estat* del 3/11/1989). Encara que els principals països anglosaxons (el Regne Unit i els Estats Units d'Amèrica) utilitzen freqüentment el SI, és convenient assenyalar que aquests mantenen els seus sistemes propis de forta tradició, sobretot en el camp de la tècnica.

Les **magnituds bàsiques** són un conjunt de magnituds independents, que formen una base coherent i completa, a la qual poden afegir-se'n dues més anomenades suplementàries, que permeten definir les magnituds angulars. Les magnituds que poden expressar-se en funció de les bàsiques s'anomenen **magnituds derivades**. La taula C.1 inclou el conjunt general de magnituds bàsiques i les dues magnituds suplementàries adimensionals. A més a més, indica el nom, el símbol i la dimensió assignada a cada magnitud.

Algunes magnituds derivades reben noms i símbols especials i a vegades és molt útil emprar-les com si foren bàsiques. Per exemple, la força s'expressa com $\text{kg}\cdot\text{m}/\text{s}^2$ en unitats bàsiques però és habitual utilitzar el newton (N). La taula C.2 presenta algunes magnituds derivades que tenen noms especials.

Taula C.1: Unitats bàsiques del SI

Magnitud	Unitats bàsiques		
	Nom	Símbol	Dimensió
Longitud	metre	m	L
Massa	quilogram	kg	M
Temps	segon	s	T
Intensitat de corrent elèctric	ampere	A	I
Temperatura termodinàmica	kelvin	K	T, Θ
Quantitat de substància	mol	mol	N
Intensitat lluminosa	candela	cd	J
	Unitats suplementàries		
	Nom	Símbol	Dimensió
Angle pla	radiant	rad	
Angle sòlid	estereoradian	sr	

Taula C.2: Unitats derivades del SI

Magnitud	Unitats derivades		
	Nom	Símbol	Unitats bàsiques
Força	newton	N	$\text{kg}\cdot\text{m}/\text{s}^2$
Pressió			
Tensió	pascal	Pa	$\text{kg}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{s}^{-2} = \text{N}/\text{m}^2$
Esforç			
Energia			
Treball	joule	J	$\text{m}^2\cdot\text{kg}/\text{s}^2 = \text{N}\cdot\text{m}$
Calor			
Potència	watt	W	$\text{m}^2\cdot\text{kg}/\text{s}^3 = \text{J}/\text{s}$
Flux radiant			
Quantitat d'electricitat	coulomb	C	$\text{A}\cdot\text{s}$
Càrrega elèctrica			
Tensió elèctrica	volt	V	$\text{m}^2\cdot\text{kg}\cdot\text{s}^{-3}\cdot\text{A}^{-1} = \text{W}/\text{A}$
Potencial elèctric			
Resistència elèctrica	ohm	Ω	$\text{m}^2\cdot\text{kg}\cdot\text{s}^{-3}\cdot\text{A}^{-2} = \text{V}/\text{A}$
Flux magnètic	weber	Wb	$\text{m}^2\cdot\text{kg}\cdot\text{s}^{-2}\cdot\text{A}^{-1} = \text{V}\cdot\text{s}$
Flux d'inducció magnètica			
Inducció magnètica	tesla	T	$\text{kg}\cdot\text{s}^{-2}\cdot\text{A}^{-1} = \text{Wb}/\text{m}^2$
Densitat de flux magnètic			
Inductància	henry	H	$\text{m}^2\cdot\text{kg}\cdot\text{s}^{-2}\cdot\text{A}^{-2}$
Capacitat	farad	F	$\text{m}^{-2}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{s}^4\cdot\text{A}^2$
Flux lluminós	lumen	lm	$\text{cd}\cdot\text{sr}$
Il·luminació	lux	lx	$\text{m}^{-2}\cdot\text{cd}\cdot\text{sr} = \text{lm}/\text{m}^2$

Els múltiples i submúltiples decimals de les unitats poden expressar-se mitjançant prefixos. La taula C.3 indica els símbols i valors dels prefixos. Així, una càrrega aplicada a una biga de $1,5 \cdot 10^6$ N es pot escriure com 1,5 MN. El símbol d'un prefix es considera combinat amb el símbol de la unitat a què està lligat, sense espai intermedi, i passen a formar el símbol d'una nova unitat que es pot combinar amb altres símbols d'unitats. Així per exemple $1 \text{ cm}^3 = 10^{-6} \text{ m}^3$. No s'han de fer servir prefixos compostos com per exemple MkN en lloc de GN.

Taula C.3: Prefixos en el SI

Múltiples			Submúltiples		
Factor	Prefix	Símbol	Factor	Prefix	Símbol
10^{18}	exa	E	10^{-1}	deci	d
10^{15}	peta	P	10^{-2}	centi	c
10^{12}	tera	T	10^{-3}	mil·li	m
10^9	giga	G	10^{-6}	micro	μ
10^6	mega	M	10^{-9}	nano	n
10^3	quilo	k	10^{-12}	pico	p
10^2	hecto	h	10^{-15}	femto	f
10^1	deca	da	10^{-18}	atto	a

Les magnituds físiques que s'utilitzen en mecànica poden expressar-se en funció de només tres magnituds bàsiques: longitud (L), massa (M) i temps (T). La relació funcional entre si pot escriure's com $[Magnitud] = L^\alpha M^\beta T^\gamma$, on α , β i γ són nombres reals (no cal incloure els factors constants en la dependència dimensional). Aquesta relació rep el nom d'**equació dimensional de la magnitud** i pot utilitzar-se per a deduir la relació entre una magnitud nova i les magnituds bàsiques.

Només poden sumar-se algebraicament les magnituds que tenen la mateixa equació de dimensions, és a dir, magnituds homogènies. Les equacions de la física, de la ciència en general, han de tenir les mateixes dimensions en tots dos membres de la igualtat.

La **indeterminació dels càlculs numèrics** en l'anàlisi i resolució dels problemes tècnics reals s'ha de tenir en compte en els resultats obtinguts: tant la ciència com la tècnica **no són ciències exactes**. Els errors que afecten qualsevol resultat poden ser:

1. La indeterminació de les dades físiques conegudes.
2. La indeterminació en el model físic utilitzat en la resolució del problema.
3. L'error procedent dels càlculs numèrics (arredoniment).

Per regla general, la indeterminació o error del resultat final en enginyeria i arquitectura no pot ser superior al 0,2%. Això significa que el resultat obtingut no pot tenir més de tres o quatre xifres significatives, encara que les calculadores i ordinadors actuals poden presentar moltes més xifres numèriques. En qualsevol cas, s'ha de tenir en compte que la indeterminació del resultat final no podrà ser menor que la de la dada de major indeterminació. Per exemple, l'operació $1,25 \text{ m} + 3,1 \text{ m} = 4,3 \text{ m}$, perquè una de les dades té dues xifres significatives i el resultat final no podrà donar-se amb més de dues.

La pràctica d'enginyeria i d'arquitectura necessita fer transformació d'unitats com a conseqüència dels diferents sistemes d'unitats o del camp científic de treball. La taula C.4 inclou alguns factors de conversió entre unitats que serà molt útil per a treballar en un sistema d'unitats homogeni.

Taula C.4: Factors de conversió entre diferents sistemes d'unitats

Magnitud	Factors de conversió
Temps	$1 \text{ min} = 60 \text{ s}$ $1 \text{ h} = 3.600 \text{ s} = 60 \text{ min}$ $1 \text{ any} = 3,156 \times 10^7 \text{ s} = 5,259 \times 10^5 \text{ min} = 8.766 \text{ h}$
Longitud	$1 \text{ m} = 100 \text{ cm} = 39,37 \text{ polz}$ $1 \text{ mi} = 5.280 \text{ peu} = 1.609 \text{ m}$ $1 \text{ polz} = 2,540 \text{ cm}$
Angle	$1 \text{ rad} = 57,3^\circ$
Superfície	$1 \text{ m}^2 = 10^4 \text{ cm}^2 = 1.550 \text{ polz}^2 = 10,76 \text{ peu}^2$ $1 \text{ polz}^2 = 6,452 \text{ cm}^2$ $1 \text{ peu}^2 = 144 \text{ polz}^2 = 9,29 \times 10^{-2} \text{ m}^2$
Volum	$1 \text{ m}^3 = 10^6 \text{ cm}^3 = 1.000 \text{ litres} = 35,3 \text{ peu}^3 = 6,1 \times 10^4 \text{ polz}^3$ $1 \text{ polz}^3 = 16,39 \text{ cm}^3$ $1 \text{ peu}^3 = 1.728 \text{ polz}^3 = 2,83 \times 10^{-2} \text{ m}^3 = 28,32 \text{ litres}$
Massa	$1 \text{ kg} = 1.000 \text{ g} = 2,205 \text{ lb}$
Força	$1 \text{ dina} = 10^{-5} \text{ N} = 2,248 \times 10^{-6} \text{ lbf}$ $1 \text{ lbf} = 4,448 \text{ N} = 4,448 \times 10^5 \text{ dina}$ $1 \text{ kp} = 9,81 \text{ N}$

Resum dels fonaments matemàtics per a la física

En aquest apèndix es fa una recopilació d'expressions matemàtiques que s'utilitzen en la resolució d'exercicis. Moltes de les relacions només haurien de ser un recordatori d'altres cursos previs a l'accés universitari. L'apèndix D de [14] fa una recopilació d'expressions de trigonometria i geometria més ampla que podeu consultar si trobeu a faltar alguna fórmula matemàtica.

D.1 Vectors lliscants

La força que actua sobre un sòlid rígid és un vector lliscant, d'ací ve l'interès i la importància que els vectors lliscants i, sobretot, els sistemes de vectors lliscants tenen en **mecànica** i més particularment en l'**estàtica**.

El **vector unitari en una direcció determinada** es pot calcular com $\mathbf{u}_f = \mathbf{f}/|\mathbf{f}|$.

Els **components d'un vector (força)** es poden expressar en funció dels vectors unitaris cartesianes o dels cosinus directores:

$$\mathbf{F} = F_x \cdot \mathbf{i} + F_y \cdot \mathbf{j} + F_z \cdot \mathbf{k} = (F_x, F_y, F_z)$$

$$F_x = |\mathbf{F}| \cdot \cos \alpha, \quad F_y = |\mathbf{F}| \cdot \cos \beta, \quad F_z = |\mathbf{F}| \cdot \cos \gamma$$

La suma, el producte per un escalar i el mòdul d'un vector (força), en funció de les components són:

$$|\mathbf{F}|^2 = F_x^2 + F_y^2 + F_z^2$$

$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = (F_{1x} + F_{2x}, F_{1y} + F_{2y}, F_{1z} + F_{2z})$$

$$\alpha \cdot \mathbf{F} = (\alpha \cdot F_x, \alpha \cdot F_y, \alpha \cdot F_z)$$

El **producte escalar** de dos vectors (forces) \mathbf{F}_1 i \mathbf{F}_2 es pot calcular a partir de la definició o de les components dels vectors com:

$$\mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{F}_2 = |\mathbf{F}_1| \cdot |\mathbf{F}_2| \cdot \cos \alpha, \quad 0 \leq \alpha \leq \pi$$

$$\mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{F}_2 = F_{1x} \cdot F_{2x} + F_{1y} \cdot F_{2y} + F_{1z} \cdot F_{2z}$$

El **producte vectorial** de dos vectors \mathbf{F}_1 i \mathbf{F}_2 es pot calcular a partir de la definició (el seu mòdul) o de les components dels vectors com:

$$|\mathbf{F}_1 \times \mathbf{F}_2| = |\mathbf{F}_1| \cdot |\mathbf{F}_2| \cdot \sin \alpha, \quad 0 \leq \alpha \leq \pi$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_1 \times \mathbf{F}_2 &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ F_{1x} & F_{1y} & F_{1z} \\ F_{2x} & F_{2y} & F_{2z} \end{vmatrix} = \\ &= (F_{1y}F_{2z} - F_{1z}F_{2y}) \mathbf{i} + (F_{1z}F_{2x} - F_{1x}F_{2z}) \mathbf{j} + (F_{1x}F_{2y} - F_{1y}F_{2x}) \mathbf{k} \end{aligned}$$

És habitual que els elements estructurals utilitzats en l'edificació estiguen formats per un sistema de càrregues, distribucions de masses, moments de reacció, etc., que cal reduir a un sistema equivalent més senzill d'analitzar. Atesa una força \mathbf{F} aplicada en un punt A de la seua línia d'acció es defineix el moment d'aquesta respecte d'un punt P qualsevol de l'espai com:

$$\mathbf{M}_P(\mathbf{F}_A) = \mathbf{PA} \times \mathbf{F}$$

L'equació del camp de moments permet relacionar el moment d'una força respecte d'un punt P amb el seu moment respecte d'un altre punt Q :

$$\mathbf{M}_P = \mathbf{M}_Q + \mathbf{PQ} \times \mathbf{F}$$

En el cas particular que un dels punts siga l'origen de coordenades, l'expressió anterior s'expressa com:

$$\mathbf{M}_P = \mathbf{M}_O - \mathbf{OP} \times \mathbf{F}$$

Es defineix el **moment d'una força respecte d'un eix** com:

$$M_{eix}(\mathbf{F}_A) = (\mathbf{M}_P(\mathbf{F}_A) \cdot \mathbf{u}_{eix}) \cdot \mathbf{u}_{eix}$$

on P és un punt que pertany a l'eix considerat.

Un concepte fonamental en la reducció d'un sistema de forces és el **torçor** d'aquest: la **resultant general** i el **moment resultant** respecte d'un punt. Les expressions corresponents són:

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i; \quad \mathbf{M}_P = \sum_{i=1}^n \mathbf{PA}_i \times \mathbf{F}_i \\ \mathbf{M}_P &= \mathbf{M}_O - \mathbf{OP} \times \mathbf{R} \end{aligned}$$

Els **invariants** en un sistema de forces són la resultant \mathbf{R} i el mòdul del moment mínim $|\mathbf{m}| = \mathbf{M}_O \cdot \mathbf{u}_R$. A vegades en la bibliografia s'anomena **segon invariant**, **invariant escalar** o **automoment** al producte escalar del moment resultant per la resultant.

Si tenim un sistema de forces concurrents, el moment principal es pot calcular utilitzant el **teorema de Varignon** com: $\mathbf{M}_O = \mathbf{OC} \times \mathbf{R}$, on el punt de concurrència del sistema de forces és C .

En els sistemes de forces paral·lels, com els que constitueixen les forces pes, les forces degudes a la pressió o les forces degudes a la pressió del vent, per exemple, és molt important l'obtenció del **centre del sistema** (centre de gravetat, centre de pressions, centre d'empenyiment), el qual és un punt que pertany a l'eix central del sistema. L'expressió general és:

$$r_C = \frac{\sum_{i=1}^n |\mathbf{F}_i| \cdot r_i}{\sum_{i=1}^n |\mathbf{F}_i|}$$

D.2 Geometria de masses

El **centre de gravetat** per a un conjunt de masses puntuals o per a una distribució contínua de massa es pot calcular, respectivament, com:

$$\mathbf{r}_G = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \cdot \mathbf{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i}; \quad \mathbf{r}_G = \frac{\int_V dm \cdot \mathbf{r}}{\int_V dm}$$

Si una superfície irregular es pot dividir en N superfícies geomètricament regulars (quadrats, rectangles, triangles, cercles, etc.), l'expressió general seria:

$$\mathbf{r}_G = \frac{\sum_{i=1}^n S_i \cdot \mathbf{r}_{iG}}{\sum_{i=1}^n S_i}$$

Els **teoremes de Pappos-Guldin** relacionen el centre de gravetat d'una línia o una superfície amb la superfície lateral o el volum del cos de revolució que originen en girar al voltant d'un eix donat. Les expressions són, respectivament:

$$S = 2 \cdot \pi \cdot y_G \cdot L; \quad V = 2 \cdot \pi \cdot y_G \cdot S$$

Els **moments d'inèrcia i producte d'inèrcia** d'una superfície plana es defineixen com:

$$I_x = \int_S y^2 \cdot dS; \quad I_y = \int_S x^2 \cdot dS; \quad P_{xy} = \int_S x \cdot y \cdot dS$$

El **moment d'inèrcia polar** es la suma dels moments d'inèrcia sobre uns eixos l'origen dels quals és, precisament, el punt o pol de referència: $I_A = I_{x_A} + I_{y_A}$.

El **teorema de Steiner o dels eixos paral·lels** relaciona els moments i producte d'inèrcia d'una superfície respecte de dos eixos paral·lels, un dels quals passa pel centre de gravetat de la secció.

$$I_x = I_{x_G} + y_G^2 \cdot S; \quad I_y = I_{y_G} + x_G^2 \cdot S; \quad P_{xy} = P_{x_G y_G} + x_G \cdot y_G \cdot S$$

La relació entre els moments i producte d'inèrcia d'una superfície plana respecte d'uns eixos girats un cert angle α amb origen comú es pot expressar en forma matricial compacta com:

$$\begin{pmatrix} I_v & -P_{vw} \\ -P_{vw} & I_w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_x & -P_{xy} \\ -P_{xy} & I_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

Es pot demostrar que la traça (primer invariant) i el determinant de la matriu d'inèrcia (segon invariant) són invariants. El **primer invariant** es representa per $J_1 = I_x + I_y$, mentre que el **segon** és $J_2 = I_x \cdot I_y - P_{xy}^2$. A partir d'aquests invariants, els moments d'inèrcia principals i les direccions principals d'inèrcia es calculen a partir de:

$$I_{x_0} = \frac{J_1}{2} + \sqrt{\left(\frac{J_1}{2}\right)^2 - J_2} = \frac{I_x + I_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + P_{xy}^2}$$

$$I_{y_0} = \frac{J_1}{2} - \sqrt{\left(\frac{J_1}{2}\right)^2 - J_2} = \frac{I_x + I_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + P_{xy}^2}$$

$$\tan \theta = \frac{I_x - I_{x_0}}{P_{xy}}, \quad \tan \phi = \frac{I_x - I_{y_0}}{P_{xy}}$$

D.3 Estàtica i elasticitat

L'estudi de l'estàtica és primordial per al tècnic constructor, ja que les seues realitzacions han de satisfer la condició necessària d'estar en equilibri estable. En aquest apartat resumirem les expressions que permetran l'anàlisi de l'equilibri i les deformacions dels elements estructurals.

La condició d'equilibri d'un cos rígid equival al fet que sobre aquest actue un torçor nul. Matemàticament:

$$\mathbf{R} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i = 0; \quad \mathbf{M}_O = \sum_{i=1}^n \mathbf{OA}_i \times \mathbf{F}_i = 0$$

Quan un cos es desplaça sobre un altre apareix en el pla de contacte dels dos cossos una **força de fricció de lliscament**. La condició que compleix aquesta força és $F_{freg} \leq \mu_e \cdot R_N$.

Els cossos, sota l'acció de forces exteriors, es deformen. Aquesta deformació serà petita si la comparem amb les dimensions pròpies del cos. Això permet analitzar l'equilibri com si el cos fóra un cos rígid. Les definicions que s'utilitzen són:

$$\text{Esforç: } \sigma = \frac{F}{S}; \quad \text{Deformació unitària: } \epsilon = \frac{\Delta L}{L_0}$$

$$\text{Llei de Hooke: } \sigma = E \cdot \epsilon; \quad \text{Coeficient de Poisson: } \nu = -\frac{\epsilon_\tau}{\epsilon_\sigma} = -\frac{\frac{\Delta d}{d}}{\frac{\Delta L}{L_0}}$$

Les **expressions matemàtiques** que lliguen els esforços tallants V amb els moments flectors M per a diferents tipus de càrregues són:

$$-q = \frac{dV}{dx} \longrightarrow V(x) = - \int q \cdot dx$$

$$V(x) = \frac{dM}{dx} \longrightarrow M(x) = \int V(x) \cdot dx$$

D.4 Derivades

Les derivades mesuren l'índex de variació d'una funció en cada punt. Molts problemes, tant en matemàtiques com en altres ciències, queden determinats una vegada es coneix l'índex de variació en cada punt, és a dir, per la funció derivada. Per exemple, hi ha magnituds físiques que s'expressen amb el concepte de derivada, com la velocitat, l'acceleració, la velocitat angular, l'acceleració angular, la densitat, la pressió, la potència mecànica o la segona llei de Newton.

La derivada proporciona informació sobre com varia una funció respecte a una variable. Un problema fonamental en tota ciència experimental és l'estimació dels errors comesos en la mesura d'una magnitud. L'índex de variació indica l'increment de la funció en passar d'un punt a un altre i es pot considerar com l'**error absolut** d'una mesura: $\Delta f = f(x+h) - f(x)$. En termes diferencials: $df = f'(x) \cdot dx$. Per exemple, si s'escalfa una xapa quadrada de costat L , l'increment de l'àrea S s'obté a partir de $dS = (L^2)' \cdot dL = 2L \cdot dL$.

Però la informació més important d'una magnitud és l'**error relatiu** que dona la precisió amb què es coneix la magnitud. Es pot calcular l'error relatiu com la diferencial logarítmica de la magnitud, és a dir, $\epsilon_r = d \ln f(x)$.

Una altra aplicació de la derivada és d'indole econòmica, sobretot per minimitzar el cost de material en la fabricació, les dimensions ideals per a realitzar una tanca o el punt on s'ha de localitzar una fàbrica d'acer per tal de minimitzar els costos de transport de mena, carbó i fundent a la fàbrica.

Un altre exemple, en la construcció de carreteres i ferrocarrils cal considerar dos paràmetres fonamentals relacionats amb les derivades: són les rampes o pendents i el radi associat de curvatura. També caldrà fer la derivada per a determinar el màxim o mínim del moment flector en una biga. Molts problemes reals de l'enginyeria, la indústria, l'economia, l'arquitectura, la física, la química, la biologia o de la ciència en general s'han de plantejar en termes de maximitzar o minimitzar alguna relació entre paràmetres variables que, òbviament, necessiten l'ús del càlcul diferencial.

La taula D.1 mostra les regles de derivació bàsiques.

Taula D.1: Regles de derivació de funcions

Operació	Regla de derivació
Suma i resta	$(f \pm g)' = f' + g'$
Producte	$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$
Quocient	$(f/g)' = (f' \cdot g - f \cdot g')/g^2$
Producte per un nombre	$(k \cdot f)' = k \cdot f'$
Composició de funcions	$[g(f(x))]' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$
Funció recíproca	$(f^{-1})'(x) = 1/f'(y)$

Les funcions elementals s'agrupen en tipus diferents per a derivar-les i es presenten en dues formes: una **simple**, en què la variable és x i una altra **composta**, en què la variable és una altra funció de x . La taula D.2 mostra les derivades de les funcions elementals en les dues formes (el símbol D representa la derivada de la funció corresponent).

D.5 Integrals

L'operació inversa a la derivació s'anomena integració i tracta de donar resposta al problema de trobar una funció F tal que $F' = f$, sent f una funció coneguda. Per a poder calcular les coordenades del centre de gravetat o els moments d'inèrcia d'una figura cal realitzar una integral, encara que per a una gran part de les superfícies utilitzades és suficient amb l'ús de les taules de centres de gravetat i de moments d'inèrcia. També poden ser necessàries per a determinar el centre de gravetat de superfícies o volums si la geometria és desconeguda o no es troba en les taules. És a dir, a vegades s'haurà de deduir aplicant la definició i, per tant, caldrà resoldre una integral definida. Un cos de revolució s'obté en fer girar un recinte pla al voltant d'un eix situat en el mateix pla, de manera que cada punt del recinte descriu una circumferència quan fa una volta completa. Les àrees i els volums d'aquests cossos de revolució utilitzen la integral definida.

L'obtenció de moltes lleis físiques aplicades a l'edificació necessiten el càlcul

Taula D.2: Derivades de funcions elementals

TIPUS	FORMES	
	Simplex	Compostes
Tipus potencial	$D x^a = a \cdot x^{a-1}$ $D k = 0$ $D x = 1$ $D \sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$D f^a = a \cdot f^{a-1} \cdot f'$ $D \sqrt{f} = \frac{f'}{2\sqrt{f}}$
Tipus logarítmic	$D \ln x = 1/x$ $D \log_a x = \log_a e / x$	$D \ln f = f'/f$ $D \log_a f = f' \cdot \log_a e / f$
Tipus exponencial	$D e^x = e^x$ $D a^x = a^x \cdot \ln a$	$D e^f = e^f \cdot f'$ $D a^f = a^f \cdot \ln a \cdot f'$
	$D f^g = \underbrace{g \cdot f^{g-1} \cdot f'}_{\text{potencial}} + \underbrace{f^g \cdot \ln f \cdot g'}_{\text{exponencial}}$	
Tipus sinus	$D \sin x = \cos x$	$D \sin f = \cos f \cdot f'$
Tipus cosinus	$D \cos x = -\sin x$	$D \cos f = -\sin f \cdot f'$
Tipus tangent	$D \tan x = 1 + \tan^2 x$ $= \sec^2 x$ $= 1/\cos^2 x$	$D \tan f = (1 + \tan^2 f) \cdot f'$ $= \sec^2 f \cdot f'$ $= f'/\cos^2 f$
Tipus cotangent	$D \cot x = -1 - \cot^2 x$ $= -\csc^2 x$ $= 1/\sin^2 x$	$D \tan f = (-1 - \cot^2 f) \cdot f'$ $= -\csc^2 f \cdot f'$ $= f'/\sin^2 f$
Tipus arcsinus (= arccosinus)	$D \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$D \arcsin f = \frac{f'}{\sqrt{1-f^2}}$
Tipus arctangent (= - arccotangent)	$D \arctan x = \frac{1}{1+x^2}$	$D \arctan f = \frac{f'}{1+f^2}$

integral de forma ineludible, un altre exemple és la deducció dels teoremes de Pappus-Guldin. El càlcul d'una distribució de càrrega en una estructura articulada o en una biga també pot implicar la resolució d'una integral definida. També caldrà fer càlcul integral si es vol determinar els diagrames d'esforços tallants i de moments flectors en una biga. Per això la taula D.3 mostra les integrals de les funcions elementals en les dues formes possibles, simple i composta.

Taula D.3: Integrals de funcions elementals

TIPUS	FORMES	
	Simplex	Compostes
Tipus potencial ($a \neq -1$)	$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1}$	$\int f^a \cdot f' dx = \frac{f^{a+1}}{a+1}$
Tipus logarítmic	$\int \frac{1}{x} dx = \ln x $	$\int \frac{f'}{f} dx = \ln f $
Tipus exponencial	$\int e^x dx = e^x$ $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}$	$\int e^f \cdot f' dx = e^f$ $\int a^f \cdot f' dx = \frac{a^f}{\ln a}$
Tipus sinus	$\int \cos x dx = \sin x$	$\int \cos f \cdot f' dx = \sin f$
Tipus cosinus	$\int \sin x dx = -\cos x$	$\int \sin f \cdot f' dx = -\cos f$
Tipus tangent	$\int (1 + \tan^2 x) dx = \tan x$ $\int \sec^2 x dx = \tan x$ $\int dx / \cos^2 x = \tan x$	$\int (1 + \tan^2 f) \cdot f' dx = \tan f$ $\int \sec^2 f \cdot f' dx = \tan f$ $\int f' / \cos^2 f dx = \tan f$
Tipus cotangent	$\int (1 + \csc^2 x) dx = -\cot x$ $\int \csc^2 x dx = -\cot x$ $\int dx / \sin^2 x = -\cot x$	$\int (1 + \csc^2 f) \cdot f' dx = -\cot f$ $\int \csc^2 f \cdot f' dx = -\cot f$ $\int f' / \sin^2 f dx = -\cot f$
Tipus arcsinus (= arccosinus)	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x$ $= \arccos x$	$\int \frac{f'}{\sqrt{1-f^2}} = \arcsin f$ $= \arccos f$
Tipus arctangent (= - arccotangent)	$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x$ $= -\arctan x$ $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a}$	$\int \frac{f'}{1+f^2} dx = \arctan f$ $= -\arctan f$ $\int \frac{f'}{a^2+f^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{f}{a}$

Bibliografía

- [1] BEDFORD, A. – FOWLER, W., *Mecánica para Ingeniería: Estática*, Addison Wesley Longman de México, Naucalpan de Juárez, MÉXIC, 2000.
- [2] BELÉNDEZ, T. – NEIPP, C. – BELÉNDEZ, A., “Estudio experimental de la flexión de una viga en voladizo”, *Revista Española de Física*, 15(3): 42–45, 2001.
- [3] BELÉNDEZ, T. – NEIPP, C. – BELÉNDEZ, A., “Flexión de una barra delgada empotrada por un extremo: aproximación para pequeñas pendientes”, *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 24(4): 399–407, 2002.
- [4] BENITO, A. – CRUZ, A., *Nuevas claves para la docencia universitaria en el Espacio Europeo de Educación Superior*, Narcea, Madrid, 2005.
- [5] CARCAVILLA, A. – ESCUDERO, T., “Los conceptos en la resolución de problemas de física bien estructurados: aspectos identificativos y aspectos formales”, *Enseñanza de las ciencias*, 22(2): 213–228, 2004.
- [6] DURÀ, A. – VERA, J., *Fundamentos Físicos de las Construcciones Arquitectónicas. Volumen I: Vectores Deslizantes, Geometría de Masas y Estática*, Publicacions de la Universitat d’Alacant, Alacant, 2002.
- [7] GIANCOLI, D. C., *Física: Principios con Aplicaciones*, Prentice-Hall Hispanoamericana, Naucalpan de Juárez, MÉXIC, cuarta edición, 1997.
- [8] GULLÓN DE SENESPLEDA, E. – LÓPEZ R., M., *Problemas de Física. Volumen I: Mecánica de Sólidos*, Librería Internacional de Romo, Madrid, 6a edición, 1984.
- [9] LEONARD, W. J. – GERACE, W. J. – DUFRESNE, R. J., “Resolución de problemas basada en el análisis. hacer del análisis y del razonamiento el foco de la enseñanza de la física”, *Enseñanza de las ciencias*, 20(3): 387–400, 2002.
- [10] NEIPP, C. – RODES, J. J. – HERNÁNDEZ, A. – BLEDA, S. – BELÉNDEZ, A. – BELÉNDEZ, T., “A java based statics virtual laboratory as a support to the teaching of mechanics in technical degrees”, En *Proceedings of the International Conference on Information and Communication Technologies (ICTE 2002)*, p. 37–42. Junta de Extremadura. Consejería de Educación Ciencia y Tecnología, Badajoz, España, noviembre 2002.
- [11] PERALES, F. J., *Resolución de problemas*, Síntesis, Madrid, 2000.

- [12] RILEY, W. F. – STURGES, L. D., *Ingeniería Mecánica: Estática*, Reverté, Barcelona, 1995.
- [13] RODES ROCA, J. J. – DURÁ, A. – VERA, J., *Fonaments Físics de les Construccions Arquitectòniques. Volum I: Vectors Lliscants, Geometria de Masses i Estàtica*, Publicacions de la Universitat d'Alacant, Alacant, 2011
- [14] RODES ROCA, J. J., *Exercicis i problemes dels fonaments físics d'Arquitectura. Volum I. Vectors Lliscants i geometria de masses*, Editorial Club Universitario, Sant Vicent del Raspeig (Alacant), 2009
- [15] SHAMES, I. H., *Mecánica para Ingenieros: Estática*, Prentice Hall Iberia, Madrid, quarta edició, 1999.
- [16] TIPLER, P. A. – MOSCA, G., *Física per a la ciència i la tecnologia*, Reverté, Barcelona, 2010.
- [17] VÁZQUEZ, M. – LÓPEZ, E., *Mecánica para Ingenieros*, Noela, Madrid, 7a edició, 1998.